Universidade de Aveiro
Ano 2013

Departamento de Matemática

JUSTINA JÚLIA ARAÚJO RODRIGUES COELHO MELO

PROBABILIDADES E MAGIA MATEMÁTICA

Universidade de Aveiro
Ano 2013

Departamento de Matemática

JUSTINA JÚLIA ARAÚJO RODRIGUES COELHO MELO

PROBABILIDADES E MAGIA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Dr.ª Andreia Hall, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho primeiramente à memória do meu pai, **António Coelho**, que esteja onde estiver, sei que está feliz pela finalização deste trabalho.

À minha filha, **Maria Francisca,** uma das razões da minha vida, pelos momentos que lhe foram roubados.

Ao meu marido, **Francisco Melo** pela incansável ajuda em muitos e diferentes momentos desta investigação, pela paciência, dedicação e, principalmente, por ter sido sempre o meu grande incentivador.

o júri

presidente

Professora Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Doutora Carlota Isabel Leitão Pires Simões
Professora Auxiliar da Universidade de Coimbra - Faculdade de Ciências e Tecnologia

Professora Doutora Andreia Oliveira Hall
Professora Associada da Universidade de Aveiro

Quero agradecer:

À minha orientadora Prof.ª Doutora Andreia Hall pela atenção, disponibilidade, compreensão, paciência, tempo, críticas e sugestões, e pelo grande apoio dado em todos os momentos. A grande amizade deu-me forças para enfrentar os desafios, e a confiança, em mim depositada, foi essencial para me sentir segura em perseguir os meus objetivos. As suas sugestões e opiniões contribuíram significativamente para a definição do caminho a seguir para a concretização deste trabalho. Só me resta, mais uma vez, dizer-lhe muito obrigada.

Ao meu marido pelo grande apoio, compreensão, ajuda, carinho, amor e incentivo dados durante a realização deste trabalho.
E à minha filha que muito me apoia, dá amor em todos os momentos e que partilha comigo alegrias e tristezas.
São vocês a minha fonte de inspiração.

Aos meus pais que, despertaram em mim a sede pelo conhecimento e incentivaram o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Aos meus colegas, Ana e Sérgio pela grande ajuda que me prestaram.

À Sara pelas traduções e à Madalena pelas correções do texto.

A todos os alunos, sem os quais a nossa profissão de nada valeria.

Finalmente, a todos, os que, direta ou indiretamente, contribuíram de alguma forma para a concretização deste trabalho.

palavras-chave Probabilidades, Magia Matemática, Truques, Dados, Cartas, Paradoxos

resumo

A magia matemática pode ser usada em contexto de sala de aula para atrair a curiosidade dos alunos. Diversos truques, aparentemente mágicos, apoiam-se em resultados, padrões ou propriedades matemáticas muito curiosas. Alguns estão relacionados com o cálculo de probabilidades e são excelentes exemplos de aplicação de conceitos simples, como o cálculo de probabilidades utilizando a Lei de Laplace ou a probabilidade condicionada.

Pretende-se, neste trabalho, estudar um conjunto de truques de magia matemática que têm por base questões de probabilidades. A título de exemplo podemos referir o "Truque de Kruskal", truques com "Dados não transitivos" ou truques baseados no "Paradoxo de Monty Hall".

keywords Probability, Mathematical Magics, Odds, Tricks, Dice, Cards, Paradoxes

abstract Mathematical Magic can be used in the context of the classroom to attract the curiosity of students. Several tricks, seemingly magical, rely on mathematical results, patterns or properties, which can be very curious. Some are related with probability and are excellent examples of the application of simple concepts such as probability calculation using the “Law of Laplace” and conditional probability.

The aim of this work is to study a set of magic tricks that are based on mathematical probability questions. These include the "Kruskal Trick", some tricks with “Not Transitive Dice” and tricks based on the "Monty Hall Paradox".

Índice

Índice de Gráficos

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Introdução

"Inventar um truque de magia e inventar um teorema são atividades muito semelhantes"

(Professor Persi Diaconi- Matemático e Mágico)

Ao longo dos últimos anos, a teoria das probabilidades e a estatística tornaram-se áreas de grande importância, essenciais em todos os ramos da ciência e da vida em geral. Não é por isso de surpreender que estas áreas tenham vindo a desempenhar um papel cada vez mais importante no ensino da matemática, ao nível do ensino básico e secundário.

No nosso dia-a-dia, fazemos milhares de pequenas "apostas" inconscientes sobre resultados incertos. A maior parte das vezes, temos uma ideia intuitiva sobre o grau de incerteza que está bastante concordante com a realidade. No entanto, na probabilidade abundam resultados que são fortemente contra intuitivos e problemas cuja solução correta parece completamente contrária ao senso comum. Quando nos acercamos da porta de um elevador, pensamos que a probabilidade de que venha a descer, quando pára pela primeira vez no nosso andar, é igual à probabilidade contrária, o que, paradoxalmente, é, regra geral, falso. Por outro lado, numa família de quatro filhos, aguardamos que a situação mais provável seja que haja duas crianças de cada sexo, o que não corresponde à realidade. As ideias que serão apresentadas sobre probabilidades ajudar-nos-ão a perceber por que razões, "apostas" em jogos que, à partida, parecem favoráveis, acabam, de facto, por não o ser.

Matemática e magia podem parecer uma combinação estranha, mas muitos dos mais poderosos efeitos mágicos executados hoje em dia têm uma base matemática. Mágicos famosos usam, nas suas atuações, truques baseados na matemática. Contudo a matemática é, também, o segredo por detrás das tecnologias que usamos, dos produtos que compramos e das profissões que temos. A matemática é a linguagem que usamos para descrever o mundo que nos rodeia – é a base de todas as ciências.

Na matemática, a magia pode ser muito mais do que simples brincadeira. Pode levar a descobertas importantes. Um bom truque de magia é tão surpreendente, que não resistimos a tentar descobrir os seus princípios de funcionamento. Ao contrário dos mágicos, que nunca revelam como funcionam os seus truques, os matemáticos não sentem essa necessidade de secretismo.

O objetivo principal deste trabalho é descrever alguns truques mágicos e paradoxos para impressionar e cativar os alunos numa aula de matemática. Muitas vezes, os alunos acham a Matemática uma ciência muito abstrata e de pouca utilização prática. Estes truques e paradoxos servirão como exemplos práticos de aplicação da matemática ao mundo real, neste caso ao mundo da magia e do espetáculo.

Por tudo o que foi dito anteriormente, é importante propor aos alunos do ensino básico e secundário jogos mágicos que lhe estimulem a aprendizagem da matemática e, ao mesmo tempo, lhes permitam uma melhor compreensão da mesma. A matemática pode e deve entrar no mundo fantástico e mágico dos alunos para os motivar e surpreender mediante uma serie de atividades lúdicas.

Sendo a magia matemática uma área extremamente fértil, optámos desde o início por nos restringir a exemplos baseados em probabilidades. No entanto, ao longo deste trabalho, iremos encontrar magia que recorre a uma vasta gama de ideias matemáticas, para além das probabilidades. Esperamos que esta dissertação contribua para mostrar que toda a matemática pode ser estimulante, mágica e útil, em especial para os professores e alunos do ensino básico e secundário.

No primeiro capítulo, ir-se-ão apresentar algumas noções básicas da "teoria das probabilidades", introduzindo primeiro a definição clássica, para seguidamente tratar as probabilidades de forma axiomática. Ainda no primeiro capítulo, explanar-se-ão os temas "probabilidade condicionada", "fórmula de Bayes" e "independência". Como se poderá constatar através da leitura deste capítulo, as definições de probabilidade condicionada e de independência, juntamente com a fórmula de Bayes, são de capital importância para a resolução da maior parte dos problemas que irão aparecer ao longo da dissertação. Em todos os pontos serão apresentados exemplos, a fim de ilustrar e aplicar as definições e os teoremas expostos.

Passando ao segundo capítulo, apresentar-se-ão exemplos práticos de truques mágicos baseados na teoria das probabilidades exposta anteriormente. Tratando-se de truques baseados em probabilidades, o sucesso do mágico não é garantido, mas a sua probabilidade será elevada, como iremos ver.

Em primeiro lugar, explorar-se-á o “Princípio de Kruskal”, que é um truque de magia recorrendo a um baralho de cartas. Ir-se-á descrever o truque, o seu segredo e calcular a probabilidade de sucesso, entre outras de interesse.

Seguidamente, iremos apresentar exemplos de “Dados Não Transitivos”, que são conjuntos de dados que, ao serem lançados por dois jogadores, permitem a um deles (o mágico) ter sempre vantagem sobre o outro. Existem diversos conjuntos de “Dados Não Transitivos” e, nesta dissertação, irão ser apresentados três deles: um conjunto de Efron e dois de Grime. Tal como para o “Princípio de Kruskal”, pretende-se descrever o jogo, calcular as probabilidades associadas aos lançamentos e obter as probabilidades de sucesso.

No terceiro capítulo, explorar-se-ão três paradoxos de probabilidades diferentes. Após uma breve introdução geral ao tópico, dá-se o exemplo do “Paradoxo dos envelopes”, do “Paradoxo das portas de Monty Hall” que são explicados de uma forma mais exaustiva e do “Paradoxo dos cartões”. Trata-se de jogos em que a intuição pode levar o jogador a tomar a decisão errada, pois as verdadeiras probabilidades são contra intuitivas.

No quarto capítulo, será descrita uma experiência da exploração das probabilidades, em contexto de sala de aula, utilizando “Dados Não Transitivos” de James Grime. O objetivo desta experiência foi calcular valores aproximados das probabilidades, usando o conceito frequencista, ou seja, repetindo várias vezes a experiência. Em anexo, serão fornecidas as tabelas elaboradas com esses alunos.

No último capítulo, serão feitas as conclusões a partir de todo o trabalho desenvolvido.

Capítulo 1. Probabilidades

" *A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano."*

(Pierre Simon Laplace)

1.1. Evolução histórica da probabilidade[1]

A "teoria das probabilidades" é uma área da Matemática que tem por objetivo encontrar modelos capazes de descrever fenómenos aleatórios.

As primeiras referências históricas sobre a "teoria das probabilidades" remontam ao século XVII em trabalhos de **Cardan** e **Galileu**. Estes dois autores, embora nem aprofundando nem sistematizando muito o tema, terão sido, porventura, os primeiros a preocuparem-se com o cálculo de probabilidades. Foi com eles que apareceu o conceito mais rudimentar de probabilidade e a primeira noção de esperança matemática de uma quantidade aleatória.

Em 1654, um conhecido jogador, de seu nome Cavaleiro de De Méré, propôs a **Pascal** um problema, explicitado no exemplo 1.5.2.2, relacionado com o "jogo dos dados". Terá sido este o facto que deu origem ao aparecimento do ramo da Matemática, hoje denominado por "Teoria das probabilidades". Este e outros problemas relacionados com "jogos de azar" terão motivado uma troca intensiva de cartas entre **Pascal** e **Fermat**. Como resultado desta troca de correspondência e da resolução dos problemas atrás mencionados, apareceram as primeiras aplicações da Matemática ao domínio do acaso.

Pouco tempo depois, mais concretamente em 1656, **Huygens** publica "De ratiocinis in ludo aleae", uma obra inteiramente dedicada ao cálculo das probabilidades.

A partir desta altura, todos os grandes "geómetras" se interessaram pelo assunto, contribuindo de maneira mais ou menos significativa para o seu desenvolvimento.

Laplace, no seu livro "Théorie analytique des probabilités" publicado em 1812, apresenta, pela primeira vez, as probabilidades de uma forma sistemática. Nesse livro, **Laplace** organiza, compila e apresenta todas as descobertas, tanto suas como de seus antecessores, feitas até à época.

Todo o século XIX e inícios do século XX foi um período em que se verificou uma grande adesão por parte dos matemáticos à "teoria das probabilidades". Nomes sobejamente conhecidos, não somente relacionados com este campo particular da

[1] Esta secção apresenta um resumo da evolução histórica da probabilidade, com base na literatura referida e consultada.

Matemática, a saber, **Poisson**, **Tchebichev**, **Markov**, **Liapounov**, **Borel** e **Levi**, de entre outros, contribuíram, de forma decisiva, para o avanço e aperfeiçoamento da já então entidade autónoma "teoria das probabilidades". Dos nomes atrás citados, destacam-se os trabalhos de **Tchebichev** e seus discípulos **Markov** e **Liapounov**. Estes três matemáticos tiveram capital importância para o desenvolvimento da "teoria das probabilidades", visto que, com as suas contribuições, conseguiram tirar a referida teoria do impasse em que se encontrava. Note-se, contudo, que, ainda durante todo este período, a acima referida obra de **Laplace** era tida como ponto de referência. Todos os trabalhos publicados não mais eram do que contribuições para o seu aperfeiçoamento.

Nos finais do século XIX e inícios do século XX, começa a instalar-se entre os matemáticos o desejo de tratar a Matemática de uma forma axiomática. Nesse mesmo período, a "teoria dos conjuntos" desenvolveu-se de uma forma bastante significativa, surgindo ainda questões para as quais a "teoria das probabilidades" não era capaz de obter resposta. Todos estes fatores conjugados, levaram a que os estudiosos sentissem necessidade de reformular a "teoria das probabilidades". Entre 1920 e 1930, matemáticos como **Kolmogorov** e **Sloutski**, de entre outros, evidenciaram as íntimas relações existentes entre a "teoria dos conjuntos" e a "teoria das probabilidades"; mais: aplicaram à "teoria das probabilidades" conhecimentos e resultados pertencentes à "teoria dos conjuntos". Este passo foi fundamental para que as "probabilidades" pudessem ser tratadas de forma axiomática, podendo, assim, dar resposta a problemas que até aí eram insolúveis. Surge, desta forma, a "teoria moderna das probabilidades". Como epitáfio deste período de grande agitação e descoberta, **Kolmogorov** publica, em 1933, uma obra, ainda hoje ponto de referência, direta ou indiretamente, para a totalidade dos trabalhos, inteiramente dedicada ao tratamento axiomático das probabilidades. Poder-se-á afirmar, nunca pecando por exagero, mas talvez por defeito, que a obra de **Kolmogorov** está para o século XX, como a obra de **Laplace** esteve para o século XIX.

Para finalizar esta breve resenha histórica, uma pequena referência a **Von Mises**, o qual foi um dos precursores da "teoria frequencista". Esta teoria é também ainda hoje aceite, se bem que sujeita a críticas.

1.2. Conceitos Elementares

As probabilidades, bem como qualquer ciência ou campo particular, têm uma linguagem específica que lhes é inerente. Pretende-se aqui introduzir e explicitar termos e denominações necessárias para uma melhor compreensão do texto posterior. Ver-se-á também que um acontecimento pode ser entendido como um conjunto e, consequentemente, será feita uma analogia entre a álgebra dos acontecimentos e a álgebra dos conjuntos.

Seja **E** uma **experiência aleatória**, isto é, uma experiência em que não é possível enunciar o seu resultado; a título de exemplo, se se lançar um baralho de cartas ao ar, com certeza todas as cartas cairão; o que não se pode prever, é o número de cartas que ficarão com a face voltada para cima. Por comodidade e clareza de raciocínio e linguagem, consideremos que a experiência **E**, em causa será sempre o lançamento de um dado "**regular**". Aplicamos a palavra "regular", mas poderíamos ter optado por "**equilibrado**", "**não viciado**", ou outras. A aplicação destas palavras, ou equivalentes, significa que o resultado da experiência não está sujeito a qualquer tipo de condicionalismo. Neste caso, a utilização de tal palavra significa que o referido dado tem, em cada uma das suas faces, um número diferente de pintas, que o número de faces é seis, que o número de pintas varia de um a seis e, além disso, que não há qualquer propensão para a saída de uma determinada face. Caso se escrevesse "um baralho ordinário", com certeza, seriamos capazes de estabelecer mentalmente um certo número de regras, para que o baralho em tudo correspondesse aos baralhos usualmente utilizados e, nos quais, não são encontradas quaisquer anomalias.

Em muitos casos, é possível enumerar todos os resultados que possam surgir da realização de uma determinada experiência aleatória. Na nossa experiência **E**, como resultado possível da sua realização poder-se-á ter 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, denominando por 1 a saída de uma pinta na face superior, por 2 a saída de duas pintas na face superior, ... , por 6 a saída de seis pintas na face superior. A cada resultado que, da realização da experiência, possa surgir, chamar-se-á **acontecimento elementar**. O conjunto de todos os acontecimentos elementares chamar-se-á **espaço fundamental**, **conjunto dos acontecimentos elementares**, ou ainda, **conjunto dos resultados possíveis**. É usual simbolizar este conjunto por **Ω.** A todo e qualquer subconjunto do espaço fundamental chamar-se-á **acontecimento**. Para que um acontecimento se realize, é necessário que o resultado da experiência seja um dos seus elementos.

Na experiência **E** em causa, ter-se-á como espaço fundamental $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, e como acontecimentos elementares $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\ e\ \{6\}$.

Os seguintes conjuntos serão exemplos de acontecimentos compostos $\{1, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}$.

Se lançarmos um dado e afirmarmos que se realizou o acontecimento elementar {3} é o mesmo que dizer que na face voltada para cima estavam três pintas. Portanto, dizer que um acontecimento elementar se realiza é o mesmo que enunciar o resultado da experiência. Note-se, contudo, que afirmar que um acontecimento **A** qualquer se realizou, não implica que se esteja a enunciar o resultado da experiência.

Por uma questão de convenção, simbolizou-se por $\emptyset$ o **acontecimento impossível**. **Acontecimento impossível** é todo aquele que não pode ocorrer como resultado da experiência em causa. Se se supuser **A** = "ocorre 3 ou 4", **B** = "ocorre 1 ou 5" e **C** = "A e B ocorrem" o acontecimento **C** será um acontecimento impossível na experiência considerada.

Exemplo 1.2.1: As peças de uma linha de produção de grande precisão são rotuladas de duas formas: defeituosas (**D**) e não defeituosas (**N**). Cada peça é inspecionada e rotulada logo após o seu fabrico. A produção pára quando são detetadas consecutivamente duas peças defeituosas, ou após o fabrico de quatro peças quaisquer, para que o reajustamento da máquina se faça. Ter-se-á como espaço fundamental:

$$\Omega = \{(DD), (DNDD), (DNDN), (DNND), (DNNN), (NDD), (NDND), (NDNN), (NNDD), (NNDN), (NNND), (NNNN)\}.$$

Seja a seguinte afirmação: *"No final obter-se-ão exatamente três peças não defeituosas".* São acontecimentos elementares favoráveis a esta afirmação $\{(DNNN)\}, \{(NDNN)\}, \{(NNDN)\ e\ \{(NNND)\}$.

Como, foi dito, o tratamento dos acontecimentos como conjuntos em tudo veio beneficiar o estudo das probabilidades. Ver-se-á agora de que forma se pode fazer uma analogia entre a álgebra dos acontecimentos e a álgebra dos conjuntos.

A totalidade das operações efetuadas entre conjuntos pode aplicar-se a acontecimentos. A reunião, interseção e complementaridade, de entre outras, são operações que assumem pleno sentido quando efetuadas entre acontecimentos. Vejam-se alguns exemplos:

i) $\boldsymbol{A \cap B}$

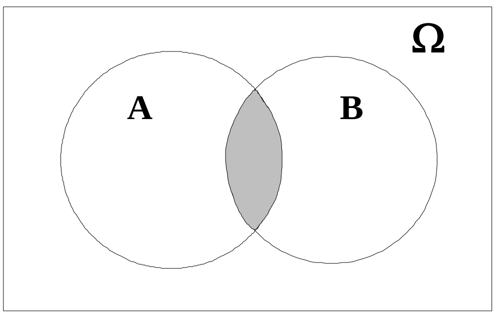

Figura 1 - A região a sombreado é o acontecimento A∩B

Ao acontecimento $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, designado acontecimento interseção, pertencem somente os elementos de $\boldsymbol{A}$ que também sejam elementos de $\boldsymbol{B}$. Para que se realize o acontecimento $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ é necessário que se realizem os acontecimentos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ simultaneamente.

Caso se tenha uma intersecção infinita numerável, $\bigcap_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A_i} = \boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{A_2} \cap \ldots \cap \boldsymbol{A_n} \cap \ldots$, ao acontecimento $\bigcap_{\mathbf{i=1}}^{\infty} \mathbf{A_i}$ pertencem unicamente os elementos comuns a todos os $\boldsymbol{A_i}$,e este ocorre se e somente se todos os $\boldsymbol{A_i}$ ocorrerem.

ii) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$

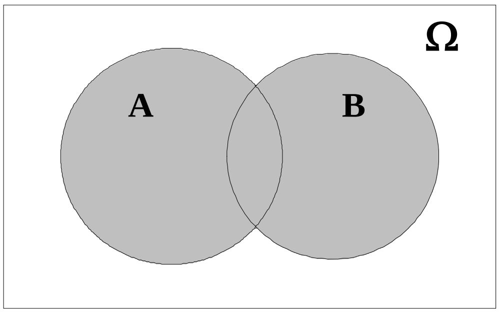

Figura 2 - Os círculos sombreados é o acontecimento AUB .

Ao acontecimento $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, designado acontecimento reunião, pertencem todos os elementos de $\boldsymbol{A}$ ou de $\boldsymbol{B}$. Este ocorre se, e somente se, $\boldsymbol{A}$ ocorrer e $\boldsymbol{B}$ não ocorrer, $\boldsymbol{B}$ ocorrer e $\boldsymbol{A}$ não ocorrer ou ambos ocorrerem. Note-se que no caso de a reunião ser em número infinito numerável $\bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A_i} = \boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{A_n} \cup \ldots$ ao acontecimento $\bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A_i}$ pertencem todos os elementos pertencentes aos $\boldsymbol{A_i}$ e ocorre se e somente se pelo menos um dos $\boldsymbol{A_i}$ ocorre.

iii) $\overline{A}$

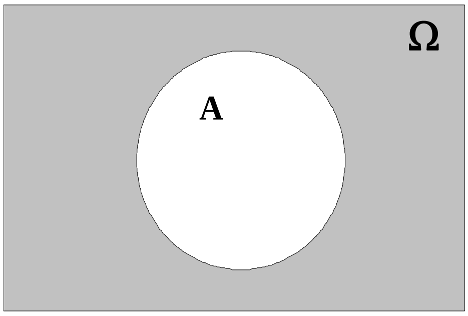

Figura 3 - O círculo a branco é o acontecimento A e a região a sombreado é o acontecimento Complementar de A

Ao acontecimento $\overline{\boldsymbol{A}}$ dá-se o nome de complementar de $\boldsymbol{A}$. A este acontecimento pertencem todos os elementos do espaço fundamental Ω, que não são elementos de $\boldsymbol{A}$. O acontecimento $\overline{\boldsymbol{A}}$ ocorre quando $\boldsymbol{A}$ não ocorrer. Se o acontecimento $\boldsymbol{A}$ não tiver interseção vazia com um outro acontecimento, suponha-se $\boldsymbol{B}$, terá significado falar no complementar de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$, de notação $\boldsymbol{B}\backslash\boldsymbol{A}$. Ao complementar de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$ pertencem os elementos de $\boldsymbol{B}$ que não pertence a $\boldsymbol{A}$, será neste caso equivalente falar no complementar de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$ ou falar na diferença $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$.

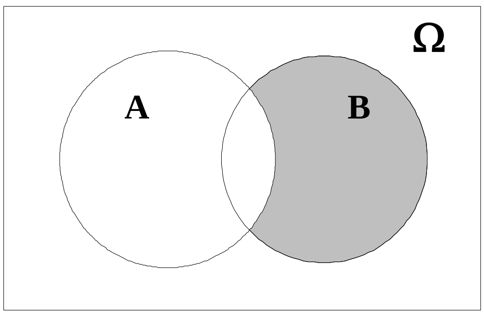

Figura 4 - Acontecimento B exceto o acontecimento A

iv) $\boldsymbol{B - A}$

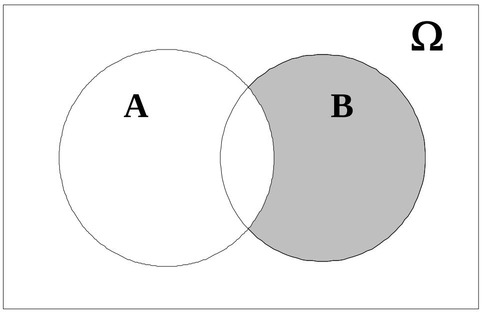

Figura 5 - O conjunto a sombreado representa a diferença entre dois conjuntos $B - A$

O acontecimento diferença $\mathbf{B - A}$ será o conjunto constituído pelos elementos de $\boldsymbol{B}$ que não são de $\boldsymbol{A}$ e ocorre unicamente quando $\boldsymbol{B}$ ocorrer e $\boldsymbol{A}$ não ocorrer.

v) $\boldsymbol{A \subset B}$

Dir-se-á que o acontecimento $\boldsymbol{A}$ está contido no acontecimento $\boldsymbol{B}$ se a realização de $\boldsymbol{A}$ implicar a realização de $\boldsymbol{B}$. Neste caso todos os elementos de $\boldsymbol{A}$ são elementos de $\boldsymbol{B}$.

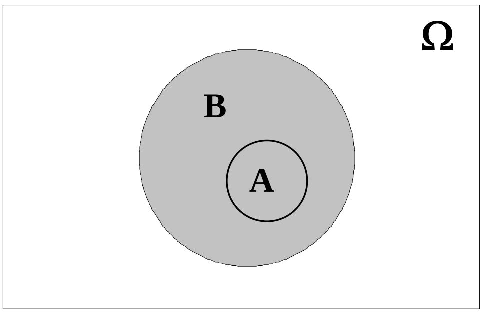

Figura 6- Acontecimento A está contido no acontecimento B

vi) $\boldsymbol{A = B}$

Para que $\boldsymbol{A}$ seja idêntico a $\boldsymbol{B}$ é necessário que $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ e também $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$, ou seja, que a realização de um qualquer deles implique a realização do outro.

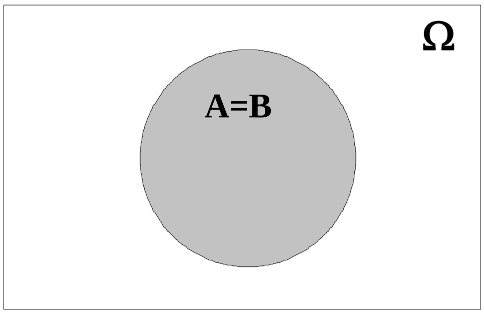

Figura 7 – Acontecimento A idêntico ao acontecimento B

vii) Incompatibilidade

Dois acontecimentos dizem-se incompatíveis ou mutuamente exclusivos se a realização de um deles implicar a não realização do outro. Quando em causa estiverem mais de dois acontecimentos, a incompatibilidade significará que os acontecimentos são mutuamente exclusivos.

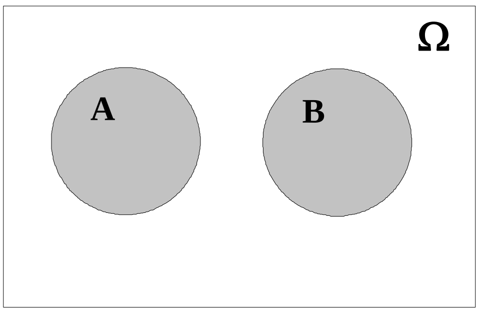

Figura 8 – A e B são incompatíveis

Se consideramos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ três acontecimentos relacionados com uma mesma experiência. Eis alguns exemplos de como traduzir para linguagem comum expressões envolvendo acontecimentos:

i) $A \cup B \cup C$: pelo menos um dos acontecimentos ocorre.

ii) $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$: um e um só acontecimento ocorre.

iii) $A \cap B \cap C$: os três acontecimentos ocorrem simultaneamente.

iv $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$: ocorre somente o acontecimento $\boldsymbol{A}$.

1.3. Definição clássica de probabilidades

1.3.1. Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Figura 9 - Pierre Simon Laplace

Nasceu a 28 de Março de 1749 em Beaumont-en-Auge, em França, e morreu a 5 de Março de 1827 em Paris, França. Entre os 7 e os 16 anos, Laplace frequentou uma escola Beneditina em Beaumont. Aos 16 anos, entrou para a Universidade de Caen para estudar teologia e foi aqui, em Caen, que Laplace escreveu o seu primeiro artigo.

Aos 19 anos, devido à influência de d'Alembert, Laplace foi nomeado professor de uma cadeira matemática na ”École Militar,” em Paris. Em 1773, tornou-se membro da Academia de Ciências de Paris e durante a Revolução Francesa, Laplace ajudou a estabelecer o sistema métrico. Lecionou Cálculo na “École Normale” e tornou-se membro do “French Institute” em 1795. Durante o governo de Napoleão, Laplace foi membro e depois chanceler do Senado e recebeu a Legião de Honra, em 1805. É, por isso, surpreendente que, nas suas memórias, Napoleão refira que dispensou os serviços de Laplace, após seis semanas pois "*ele trouxe para o governo o espírito do infinitamente pequeno".*

Laplace tornou-se Conde do Império em 1806 e depois, em 1817, foi nomeado Marquês. No final da sua vida viveu em Arcueil, onde ajudou a fundar a “Societé d'Arcueil” e encorajou o trabalho de jovens cientistas.

Laplace apresentou em "Exposition du systeme du monde" (1796) a sua famosa teoria nebular, que descrevia o sistema solar como o resultado de uma série de contrações e arrefecimentos de uma grande nuvem de gás incandescente, de rotação lenta.

O seu maior trabalho no campo da Astronomia, "Traité de Mécanique Céleste", foi publicado em cinco volumes ao longo de 26 anos (1799-1825) e continha importantes resultados sobre movimentos e órbitas de planetas. Também se dedicou ao estudo de equações diferenciais e da geodesia. Em análise, Laplace introduziu a função potência e os coeficientes de Laplace.

Laplace deu grandes contributos também ao nível da evolução do Cálculo das Probabilidades. Deve-se a ele a definição clássica de Probabilidade, expressa na conhecida **Lei de Laplace**: "*a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, supondo que todos os casos são igualmente possíveis*". Relativamente a este tema, uma das suas obras mais célebres é o livro "Theórie Analytique des Probabilités" (Teoria Analítica das Probabilidades), que foi publicado em 1812.

1.3.2. Lei de Laplace

"A Teoria do acaso consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo género a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente seguros sobre a sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é a pretendida. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis".

(Retirado de: Pierre Simon Laplace, Ensaios Filosóficos sobre as Probabilidades) (Gomes & Raposo, 2012)

Inicialmente, o estudo da teoria das probabilidades foi motivado pelos denominados jogos do acaso, como aliás foi referido na introdução, de entre eles, jogos com dados e jogos com cartas. A probabilidade, $\boldsymbol{P}$, de um acontecimento $\boldsymbol{A}$ ocorrer era definida da seguinte forma:

Definido o espaço de resultados Ω constituído por um número finito de elementos, todos eles com igual possibilidade de se realizar (equiprováveis), a probabilidade de um acontecimento $\boldsymbol{A}$ é a razão entre o número de **casos favoráveis** a $\boldsymbol{A}$ (resultados que constituem $\boldsymbol{A}$) e o número **de casos possíveis** (resultados que constituem **Ω**) e representa-se por $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$:

$$P(A) = \frac{Nº\ de\ Casos\ Favoráveis\ a\ A}{Nº\ de\ Casos\ Possíveis} = \frac{\#\, A}{\#\, \Omega}$$

Exemplo 1.3.2.1: Uma empresa de táxis tem ao seu serviço 25 automóveis, dos quais 20 são pretos e verdes e 5 são beges. A probabilidade de a uma chamada responder um táxi bege é $\boldsymbol{P}$ (táxi **bege**) = $\frac{5}{25}$ **=** $\frac{1}{5}$.

A probabilidade do táxi ser preto e verde é $\boldsymbol{P}$ (táxi **preto e verde**) = $\frac{20}{25}$ = $\frac{4}{5}$.

Exemplo 1.3.2.2: Numa dada biblioteca existem 7 exemplares de um determinado livro. Desses 7 exemplares, 4 são da primeira edição e 3 de uma edição já revista. Supondo que não está nenhum exemplar requisitado e que a escolha do empregado sobre qual livro a trazer é aleatória, a probabilidade de se requerer um exemplar que seja da primeira edição é $\frac{4}{7}$, e a probabilidade de se requerer um exemplar revisto é $\frac{3}{7}$.

A definição clássica de probabilidade é susceptível de críticas. O uso na sua definição da ideia "*resultados igualmente prováveis*" é o ponto fulcral dessas críticas, já que, "*resultados igualmente prováveis*" significa o mesmo que "*resultados com igual probabilidade*", ideia que ainda não foi definida.

Ver-se-á mais à frente que a definição clássica tem por base os **espaços equiprováveis**, os quais são um caso particular dos espaços de resultados.

1.4. Definição frequentista de probabilidades

1.4.1. Jacob Bernoulli (1654-1705)

Figura 10 - Jacob Bernoulli

Jacob Bernoulli nasceu a 27 de Dezembro de 1654 em Basel, na Suíça, onde faleceu a 16 de Agosto de 1705. Era irmão mais velho do também famoso matemático Johann Bernoulli.

Bernoulli, estudou matemática e astronomia, contra a vontade dos seus pais. Em 1676, após licenciar-se em Teologia, foi para Genebra, onde trabalhou como tutor. Mais tarde, viajou para França, onde trabalhou durante dois anos com os seguidores de Descartes.

Em 1681, Bernoulli foi para a Holanda, onde conheceu vários matemáticos. Continuando os seus estudos com os mais célebres cientistas e matemáticos da Europa, Bernoulli foi para Inglaterra, onde conheceu, entre outros, Boyle e Hooke. Em resultado de tantas viagens, Bernoulli estabeleceu contatos com vários matemáticos, mantendo-os durante muitos anos. Regressou, depois, à Suíça, onde ensinou mecânica na Universidade de Basel desde 1683, tendo dado várias palestras sobre mecânica de sólidos e líquidos.

Note-se que as publicações de Leibniz sobre o cálculo eram muito obscuras para os matemáticos da época e os irmãos Bernoulli foram os primeiros a tentar compreender e aplicar a sua teoria.

Foram várias as primeiras grandes contribuições de Bernoulli para a matemática: em 1685 publicou um “panfleto” sobre o paralelismo entre a lógica e a álgebra; em 1685 trabalhou no campo da Teoria das Probabilidades (é de referir que, a conselho de Leibniz, Bernoulli se dedicou a aperfeiçoar os estudos feitos anteriormente nesta área e pode-se dizer que é devido ao seu trabalho que o Cálculo de Probabilidades adquiriu o estatuto de ciência); em 1687 elaborou trabalhos no campo da Geometria, e os resultados que obteve permitiram-lhe formular uma construção que permitia dividir qualquer triângulo em quatro partes iguais com duas linhas perpendiculares.

Em 1689, Bernoulli publicou dois trabalhos: um sobre séries infinitas e outro em que demonstrava a chamada **Lei dos Grandes Números**, grande contributo para a evolução do Cálculo das Probabilidades. Deve-se a ele a *definição frequencista de probabilidade*, expressa nessa lei: “*a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num determinado valor à medida que aumenta o número de vezes que se realiza uma experiência”*

Em Maio de 1690, Bernoulli publicou um artigo muito importante para a história do desenvolvimento do Cálculo, uma vez que é nele que o termo integral aparece pela primeira vez com o verdadeiro sentido de integração. Em 1696 resolveu a equação que hoje conhecemos como "Equação de Bernoulli": $p + \rho g y + \frac{1}{2}\,\rho v^2 = constante$.

Bernoulli interessou-se também pelo estudo de curvas, entre as quais as hipocicloides e epicicloides, a cicloide, a catenária, as ovais de Cassini, a espiral equiangular e a lemniscata, que depois ficou com o seu nome. Ele foi também o matemático que mais avançou no estudo da espiral logarítmica.

Aquando da sua morte o seu trabalho estava incompleto, não deixando, no entanto, de ter um enorme significado na Teoria das Probabilidades.

Bernoulli, um apaixonado pelas curvas e pelo Cálculo, que sempre considerou as propriedades da espiral logarítmica como sendo quase mágicas, pediu que, na sua pedra tumular, ficasse inscrita a seguinte frase em latim: " *Eadem Mutata Resurgo*", que significa *"Surjo de novo igual, apesar de diferente"*

1.4.2. Lei dos Grandes números

Em 1692, Jacob Bernoulli demonstrou um teorema, segundo o qual, conhecendo-se a probabilidade de ocorrência de um acontecimento numa experiência aleatória, é possível indicar quais são as expetativas da frequência da sua ocorrência, se a mesma experiência for repetida um número considerável de vezes sob condições semelhantes. Por outro lado, se é desconhecida a probabilidade de um acontecimento, mas o número de experiências é muito grande, a sua probabilidade pode ser aproximada, a partir deste resultado.

A Frequência Relativa de um acontecimento é definida como sendo a relação entre o número de vezes em que esse acontecimento aconteceu numa dada série de repetições de uma experiência aleatória e o número total de repetições da referida experiência. Por outras palavras:

$$Frequência\ Relativa = \frac{Nº\ de\ Ocorrências\ de\ um\ Acontecimento}{Nº\ Total\ de\ Experiências}$$

O teorema de Bernoulli, mais conhecido como a "**Lei dos Grandes Números**", afirma que, numa grande quantidade de experiências, a frequência relativa de um acontecimento se aproxima cada vez mais da sua probabilidade. Em outras palavras, quando se repete uma experiência um número suficientemente grande de vezes é possível, na equação acima, substituir a expressão "Frequência Relativa" por "Probabilidade" com erro desprezável. Assim, dada uma grande quantidade de experiências, pode-se calcular aproximadamente a probabilidade de um acontecimento, ou então, dada a probabilidade de um acontecimento, pode-se calcular o número aproximado de vezes que ele deve ocorrer numa grande quantidade de tentativas.

Para se compreender bem a *Lei dos Grandes Números* e suas implicações, é interessante considerar algumas experiências práticas e também estabelecer um contraste com a definição clássica de probabilidade.

Usando-se a definição clássica, a probabilidade de ocorrer uma *"cara"* no lançamento de uma moeda equilibrada é de $\frac{1}{2}$ ou 50%. Numa experiência aleatória no sentido de detetar a ocorrência do acontecimento, foram obtidos os seguintes resultados concretos:

Tabela 1 – Tabela de Frequências

N° de Lançamentos	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Diferença p/ Probabilidade Clássica
10	4	4/10 = 0.40 = 40%	10%
30	14	14/30 = 0.47 = 47%	3%
60	31	31/60 = 0.52 = 52%	2%
100	**49**	**49/100 = 0.49 = 49%**	**1%**

Como se pode ver, à medida que se aumenta o número de lançamentos, o valor da frequência relativa aproxima-se cada vez mais dos 50% previstos pela definição clássica de Probabilidade. Naturalmente, uma outra série de 100 lançamentos apresentaria números específicos diferentes, mas o mesmo tipo de convergência. Também é intuitivo que fenómenos diferentes, com diferentes mecanismos probabilísticos, apresentam diferentes velocidades de convergência.

A **Lei dos Grandes Números** é válida para qualquer tipo de experiência aleatória, de modo que, substituindo-se o "lançamento de uma moeda" por um resultado observacional ou experimental qualquer, se pode ter, numa grande quantidade de registos, a probabilidade de um diagnóstico específico, de um determinado achado laboratorial ou de um certo desenvolvimento clínico. É interessante notar, contudo, que o número de observações precisa ser grande o suficiente para que se possa ter uma precisão aceitável para a probabilidade estimada, o que costuma implicar números realmente "grandes", como sugere o nome da Lei.

1.5. Teoria axiomática de probabilidades

Desde o século XVII que a Teoria das Probabilidades é utilizada intensivamente. Muitas das regras em que essa utilização se baseava tinham, contudo, um caráter mais ou menos empírico, isto é, não tinham sido demonstradas.

No século XX, um matemático russo, Kolmogorov, fez, em relação às Probabilidades, o mesmo trabalho que Euclides tinha feito relativamente à Geometria. Tomou como ponto de partida um conjunto de axiomas e, à custa deles, demonstrou vários teoremas, muitos dos quais eram as tais regras utilizadas empiricamente.

1.5.1. Andrei Kolmogorov (1903-1987)

Figura 11 – Andrei kolmogorov

O mais influente matemático soviético do século XX, nascido em Tambov, Rússia, iniciador da teoria matemática da probabilidade, criou para ela uma base axiomática fundamentada na teoria dos conjuntos. Graduou-se em física e matemática na Universidade Estatal de Moscovo (1925) onde foi nomeado professor (1931) e diretor do Instituto de Matemática (1933).

Kolmogorov começou por se interessar por Teoria de Conjuntos, Geometria Projetiva, Teoria das Funções Analíticas e Lógica Matemática.

Em 1929, apresenta, em "**General** *theory of measure and the calculus of probabilities"*, as suas primeiras ideias sobre a Teoria das Probabilidades, baseadas na teoria da medida e na teoria das funções reais de variável real.

Em 1934, constrói a primeira axiomática para a Teoria das Probabilidades. Esta axiomática ficou conhecida como Axiomática de Kolmogorov.

Ao longo da sua vida, Kolmogorov dedicou-se ao estudo e pesquisa de muitos e variados temas. Participou nas principais descobertas científicas do século XX nas áreas das probabilidades e da estatística e na teoria da informação. A sua obra, vasta e diversificada, abrange, entre outras, pesquisas em Álgebra e em Topologia, que ajudaram a estabelecer as bases de estudos posteriores da Análise Matemática.

Na área da educação, Kolmogorov desempenhou um papel fundamental na reestruturação do sistema educativo universitário na União Soviética, particularmente na atualização dos programas de Matemática.

1.5.2. Axiomática de Kolmogorov

A grande maioria dos autores, quando abordam o tratamento axiomático das "Probabilidades", fazem-no de uma forma progressiva. Começam, primeiro, por estudar o caso em que o espaço fundamental **Ω** é finito, generalizando posteriormente para o caso em que **Ω** é infinito. Como geralmente, o estudo das "probabilidades" tendo **Ω** como finito não mais é que uma particularização do mesmo com o **Ω** é infinito, no presente texto, salvo referência em contrário, todo o estudo terá como suporte um espaço fundamental infinito. A particularização para o caso finito será efetuada sempre que tal se mostrar necessário e/ou vantajoso.

No que se segue, vai ser necessário considerar um conjunto ***a,*** obtido a partir do espaço fundamental **Ω.** Tendo-se um suporte **Ω** infinito, existe a necessidade de limitar o conjunto ***a***: ***a*** será sempre um subconjunto de ***P*(Ω)** (partes de **Ω**), sobre o qual se irá trabalhar. Caso não se limitasse o ***a***, ou seja, se se trabalhasse com o conjunto ***P*(Ω),** poderia acontecer não ser possível fazer corresponder a cada elemento um número real, que seria a sua probabilidade, de modo a que os axiomas de probabilidade, definidos mais à frente, se verificassem. O referido conjunto ***a*** deverá obedecer a regras, bem definidas, de modo a que não surjam incongruências no decorrer da explanação da matéria. O referido conjunto terá, evidentemente, que conter os acontecimentos que nos interessam e os resultados de quaisquer operações que com eles se possam fazer. Se se supuser que ***a*** é uma σ ***-álgebra*** tais problemas não ocorrerão.

Definição 1.5.2.1: Seja **Ω** um conjunto e ***a*** um conjunto de partes de **Ω**. ***a*** é uma ***tribo*** ou σ ***-álgebra*** sobre **Ω** quando:

i) $\Omega \subset a$

ii) $A \subset a \Rightarrow \overline{A} \subset a$

iii) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \subset a \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset a$

No caso de **Ω** ser finito seria suficiente que o conjunto ***a*** fosse uma álgebra. Para que ***a*** fosse uma álgebra, além dos pontos i) e ii), era suficiente exigir que a reunião de um número finito de elementos de ***a***, pertencesse.

Poder-se-ia provar que a totalidade das operações possíveis de ser efetuadas sobre elementos de ***a*** são leis internas. A título de exemplo, basta notar que, para a interseção, se tem $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ e que, para a diferença se verifica $A - B = A \cap \overline{B}$.

Definição 1.5.2.2: Chama-se **espaço probabilizável** ao par **(Ω, *a*)** onde **Ω** é um conjunto e ***a*** é uma tribo sobre **Ω**.

Para completar a construção de um modelo de probabilidade referente a uma experiência aleatória falta ainda a definição de probabilidade.

Seja $\boldsymbol{A}$ um acontecimento pertencente à tribo em causa. Intuitivamente, e de uma forma pouco precisa, chamar-se-á probabilidade de $\boldsymbol{A}$, com notação $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$, ao valor numérico que indique a hipótese de $\boldsymbol{A}$ ocorrer. Em 1933, Kolmogorov propõe a seguinte definição de probabilidade:

Definição 1.5.2.3: Uma função real **P** definida sobre ***a*** é uma probabilidade se os seguintes axiomas se verificarem:

[A1] Para todo o acontecimento $\boldsymbol{A}$, $P(A) \geq 0$.

[A2] $P(\Omega) = 1$.

[A3] Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ é uma sucessão de acontecimentos tais que $\boldsymbol{A_i} \cap \boldsymbol{A_j} = \emptyset$ para $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$, então $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. O axioma **[A3]** é usualmente denominado por σ **aditividade**.

Se estivéssemos a trabalhar com um **Ω** finito os axiomas da definição de $\boldsymbol{P}$ acima expostos, com a excepção do axioma **[A3]**, seriam os mesmos. No axioma **[A3]** seria suficiente considerar a probabilidade de uma reunião de um número finito de acontecimentos. Este novo axioma, com reunião finita, é denominado por **aditividade**.

Supondo ainda **Ω** finito, chamar-se-ão **espaços equiprováveis** a todos aqueles espaços fundamentais em que os acontecimentos elementares tenham a mesma probabilidade. Assim, supondo que o **Ω** em causa tem ***n*** elementos,

$$\Omega = \{ a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n \}, \text{ ter-se-á:}$$

$$\boldsymbol{P}(\{a_1\}) = \boldsymbol{P}(\{a_2\}) = \dots = \boldsymbol{P}(\{a_n\}) = \frac{1}{n}.$$

Mais, com bastante facilidade se provaria que a aplicação **P** de **P (Ω)** em [0,1] definida pela lei de Laplace por: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\# A}{\# \Omega}$ é uma probabilidade .

Um típico exemplo de um espaço equiprovável será o exemplo 1.5.2.1.

Exemplo 1.5.2.1: Suponhamos que se lançam simultaneamente dois dados regulares de cores diferentes. Qual a probabilidade de os dois dados resultarem em resultados iguais?

Os elementos do espaço fundamental **Ω** são pares ordenados em que cada casa possui seis escolhas possíveis, ter-se-á, portanto, # **Ω** = 6^2 = 36. Obviamente, cada elemento de **Ω** tem igual probabilidade de ocorrência, ou seja, **Ω** é um espaço equiprovável. O número de formas diferentes que o acontecimento $\boldsymbol{A}$ "nos dois dados sai o mesmo número de pintas" pode ocorrer é 6. Ter-se-á, então:

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Exemplo 1.5.2.2: (paradoxo de De Méré)

O Cavaleiro de De Méré observou que, no lançamento simultâneo de três dados, o resultado 11 aparecia mais vezes que o resultado 12. Tal facto causou surpresa, visto considerar-se que ambos os resultados teriam a mesma probabilidade de ocorrerem. Veja-se qual o raciocínio que induziu em erro. O acontecimento 11 pode acontecer de seis formas diferentes, 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3 e 4-4-3. De igual forma, o acontecimento 12 também ele pode ocorrer de seis formas diferentes 6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-5-2, 5-4-3 e 4-4-4. Dever-se-ia então ter:

$$P(11) = P(12) = \frac{6}{N^{\underline{o}}\ de\ resultados\ Possiveis}$$

Pascal solicitado por De Méré descobriu qual o erro do raciocínio anterior. Do lançamento simultâneo de três dados surgem sequências de três algarismos, variando cada algarismo entre 1 e 6 inclusive. Ter-se-ão portanto 6^3 = 216 sequências possíveis. Consequentemente, os resultados 6-4-1 e 1-4-6 terão que ser tomados como diferentes. Recorrendo às permutações, ver-se-ia que poderão aparecer seis sequências "equivalentes" a 6-4-1, a saber, 6-4-1, 6-1-4, 4-6-1, 4-1-6, 1-6-4 e 1-4-6. Calculando novamente de quantas formas podem ocorrer os acontecimentos 11 e 12 chegar-se-ia à conclusão que o acontecimento 11 pode ocorrer de 27 formas diferentes e o acontecimento 12 de 25 formas diferentes. As suas probabilidades serão então:

$$P(11) = \frac{27}{216}$$

$$P(12) = \frac{25}{216}$$

Com este resultado a que se chegou então em nada surpreende a maior frequência do aparecimento do resultado 11 em relação ao resultado 12.

Exemplo 1.5.2.3: Um determinado casal de gatos teve uma ninhada de quatro filhotes. O Pai gato pergunta à Mãe gata qual o sexo dos filhos. A Mãe gata diz que ainda não sabe, mas que o mais provável é que sejam dois machos e duas fêmeas, visto cada gatinho ter 50% de hipóteses de ser macho e 50% de hipóteses de ser fêmea. Tal conjetura estará correta?

Não. Veja-se porquê. Os elementos do espaço fundamental **Ω** são sequências com quatro posições e duas escolhas possíveis para cada posição. Está-se, portanto, na presença de arranjos com reposição, e, consequentemente, o número de elementos de **Ω** é 2^4=16.

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

$\boldsymbol{A}$ = { dois machos e duas fêmeas }

$\boldsymbol{B}$ = { três elementos de um sexo e um do outro}

$\boldsymbol{C}$ = { todos do mesmo sexo }.

Recorrendo às permutações com elementos repetidos poder-se-á calcular os cardinais de cada um dos conjuntos referidos anteriormente:

$$\# \boldsymbol{A} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \quad , \quad \# \boldsymbol{B} = 2 \times \frac{4!}{3!} = 8 \quad \text{e} \quad \# \boldsymbol{C} = 2 \times \frac{4!}{4!} = 2.$$

Consequentemente,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{3}{8} \quad , \quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = \frac{1}{8}.$$

A conjetura que a mãe gata fez está, então, errada, visto que, probabilisticamente, há mais hipóteses de na ninhada existirem três filhotes do mesmo sexo e um do outro.

Baseado em Gardner M. (1993)

Exemplo 1.5.2.4: Nos casinos, principalmente nos Estados Unidos da América, é usual encontrar um jogo denominado por *Chuck-a-luck*. O *chuck-a-luck*, embora com ligeiras diferenças, também pode ser encontrado nos pubs Ingleses e Australianos, mas com o nome *bird-cage*.

O jogo é composto por uma tômbola que contém no seu interior três dados iguais. Na versão americana, os dados são tal como os conhecemos, enquanto, que na versão inglesa e australiana, cada um dos três dados contém os símbolos de espadas, ouros, copas, paus e ainda uma coroa e uma âncora. Iremos considerar a versão americana do jogo.

Para que o jogo se efetue, o jogador aposta num determinado número, perdendo se, após a rotação da tômbola, não aparecer esse número em nenhum dos dados e ganhando, caso o número apareça em algum deles. Com as regras atrás expostas, o jogador é levado a pensar da seguinte forma: "*se em causa estivesse só um dado eu teria uma hipótese de ganhar e cinco de perder; com dois dados tenho duas hipóteses de sair o* *número em que apostei, em seis resultados possíveis*". Finalmente, com três dados, tem três hipóteses de ganhar, em seis resultados possíveis. O jogo é, portanto, justo.

Na realidade, o jogo não é justo, veja-se porquê. A cada rodar da tômbola corresponde uma sequência de três números, cada um dos quais compreendidos entre um e seis. Como atrás foi visto, no exemplo 1.5.2.2, o conjunto fundamental será composto por 216 elementos. Supor-se-á, sem perda de generalidade, que o número em que se apostou foi o número 1. Qual a probabilidade de se ganhar com tal aposta?

Para que seja possível responder à anterior questão é necessário saber de quantas formas diferentes pode ocorrer o seguinte acontecimento:

$\boldsymbol{A}$ = " Em pelo menos um dos dados ocorre 1 ".

O acontecimento $\boldsymbol{A}$ ocorre se algum dos seguintes acontecimentos ocorrer:

$\boldsymbol{A_1}$ = " Em um, e só um, dos dados ocorre 1 "

$\boldsymbol{A_2}$ = " Em dois dos dados ocorre 1 "

$\boldsymbol{A_3}$ = " Ocorre 1 nos três dados ".

Calculem-se agora, de quantas formas podem acontecer cada um dos acontecimentos referidos anteriormente, o que equivale a calcular o seu cardinal:

$\# \boldsymbol{A_1} = 3 \times 5^2 = 75$, $\# \boldsymbol{A_2} = 3 \times 5 = 15$ e $\# \boldsymbol{A_3} = 1$.

O acontecimento $\boldsymbol{A}$ pode ocorrer então de 91 maneiras. A sua probabilidade será:

$$P(A) = \frac{91}{216} \cong 0{,}4213$$

que é um resultado claramente desfavorável ao jogador.

Baseado em Gardner M. (1993)

Definição 1.5.2.4: A um terno **($\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{P}$)** chama-se **espaço de probabilidade** quando $\boldsymbol{\Omega}$ é um conjunto, $\boldsymbol{a}$, é uma tribo sobre $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{P}$ é uma probabilidade definida sobre $\boldsymbol{a}$.

Com base na axiomática de Kolmogorov e tendo como suporte um espaço de probabilidade ($\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{P}$), poder-se-ão enunciar um certo número de propriedades de uma qualquer probabilidade $\boldsymbol{P}$. Tais propriedades serão aqui apresentadas sob a forma de teoremas, cujas demonstrações podem ser consultadas em Murteira & Pimenta (2007).

Teorema 1.5.2.1: Se $\emptyset$ é o acontecimento impossível, então:

$$P(\emptyset) = 0$$

Teorema 1.5.2.2:

$$A \subset a, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Teorema 1.5.2.3: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ dois elementos quaisquer da tribo $\boldsymbol{a}$, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Corolário: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ dois acontecimentos mutuamente exclusivos pertencentes à tribo $\boldsymbol{a}$. Nestas condições, tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Teorema 1.5.2.4: Com $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ elementos quaisquer da tribo $\boldsymbol{a}$, verifica-se a seguinte expressão:

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$$

1.6. Probabilidade condicionada, Teorema de Bayes e Independência

1.6.1. Thomas Bayes (1702-1761)

Figura 12 – Thomas Bayes

Thomas Bayes nasceu em Londres por volta de 1702 e morreu a 17 de Abril de 1761. Filho mais velho de Joshua Bayes, um dos primeiros seis ministros "Nonconformist" ordenados em Inglaterra, foi pastor da igreja presbiteriana e matemático. Em 1719 ingressou, para estudar teologia e lógica, na Universidade de Edimburgo. No entanto os seus estudos continuariam numa universidade escocesa, pois na época os "Nonconformist" foram proibidos de frequentar Oxford e Cambridge. Utilizou a probabilidade de forma intuitiva e estabeleceu as bases para a inferência estatística tornando-se conhecido por ter formulado o famoso "**Teorema de Bayes**". Apesar de não ter obras de matemática publicadas, Bayes foi eleito membro da "Royal Society", em 1742.

Já após a sua morte, em 1763, Richard Price, amigo pessoal de Bayes publica a obra do Rev. Thomas Bayes, intitulada de "*An essay Towards Solving a problem in the Doctrine of Chances*". Com ela, foi lançada a semente para a abordagem bayesiana, hoje largamente usada nas mais diversas áreas, como a medicina e a informática.

1.6.2. Probabilidade Condicionada

Se numa experiência se supuser que um determinado acontecimento, denomine-se por $\boldsymbol{B}$, acontece (acontecimento certo), impor-se-á sempre que $\boldsymbol{B}$ tem probabilidade não nula, então, é natural que as probabilidades de outros acontecimentos sejam alteradas. A título de exemplo, considere-se que se escolhe aleatoriamente uma palavra de um dicionário de português. Seja $\boldsymbol{A}$ o acontecimento "a letra ***u*** aparece na palavra" e $\boldsymbol{B}$ "a letra ***q*** aparece na palavra".

Calcula-se a probabilidade de $\boldsymbol{A}$ dividindo o número de palavras que contêm a letra ***u*** pelo número total de palavras existentes no dicionário. De igual forma se calcula a probabilidade de $\boldsymbol{B}$. A probabilidade de $\boldsymbol{A}$ certamente que não é um, como é óbvio, mas, se se souber que $\boldsymbol{B}$ ocorre, então é certo que $\boldsymbol{A}$ também ocorre. Nestas condições, a probabilidade de $\boldsymbol{A}$ é um.

A definição de probabilidade condicionada fornece ferramentas para se poder calcular as probabilidades de cada acontecimento, supondo que se tem como certa a ocorrência de um determinado acontecimento.

Definição 1.6.2.1 Sejam dois acontecimentos, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, subconjuntos do mesmo espaço de resultados **Ω** . A probabilidade de $\boldsymbol{A}$ se realizar sabendo-se que $\boldsymbol{B}$ se realizou – ou **Probabilidade de A Condicionada por B** , designada por $\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$ – é definida, por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, com\ P(B) > 0$$

Como é óbvio, quando dois acontecimentos são incompatíveis, a probabilidade de um deles condicionada pelo outro é nula. Também é que a probabilidade de qualquer acontecimento, de probabilidade não nula, condicionada por ele próprio é um.

Se se fixar um acontecimento $\boldsymbol{B}$, pertencente à tribo em causa, que possua probabilidade positiva, a probabilidade condicionada por $\boldsymbol{B}$ satisfaz os axiomas de probabilidade, isto é, $P(A|B)$ é de facto uma probabilidade sobre **($\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{a}$)**. Com efeito, aquando da escolha de $\boldsymbol{B}$ impôs-se que $P(B) > 0$ e como $P(A \cap B) \geq 0$, então, recorrendo à definição de probabilidade condicionada, conclui-se que $P(A|B) \geq 0$, ou seja, o axioma **[A1]** é verificado.

O axioma **[A2]** é trivialmente verificado pois:

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Exemplo 1.6.2.1: Uma família tem duas crianças. Sabendo que uma delas é rapaz, qual a probabilidade da outra ser também rapaz?

Considere-se rapaz denominado por RZ e rapariga por R. As hipóteses possíveis para o sexo das crianças são os pares $(RZ, RZ), (R, R), (RZ, R)\ e\ (R, RZ)$ sendo ordenados pela data de nascimento. Seja $\boldsymbol{B}$ o acontecimento "*uma das crianças é rapaz*". O que se pretende saber é qual a probabilidade de ocorrência do par (RZ, RZ) sabendo que $\boldsymbol{B}$ ocorre. Vem:

$$P[(RZ, RZ|B)] = \frac{P[(RZ, RZ) \cap B]}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \cong 0{,}33$$

Intuitivamente, é-se tentado a responder $\frac{1}{2}$ visto ser esta a resposta à seguinte pergunta: o João é um dos filhos de uma família que tem duas crianças. Qual a probabilidade de a outra criança ser também rapaz?

Aqui o espaço de resultados será **Ω**= {(J, RZ), (J, R), (RZ, J), (R, J)}. Se se denominar por $\boldsymbol{B}$ o acontecimento "um dos filhos é o João" ter-se-á $P(B) = 1$. O que se pretende saber, neste caso é:

$$P[((RZ, J), (J, RZ))\backslash B)] = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Adaptado de Pestana & Velosa (2006)

Exemplo 1.6.2.2: Uma companhia possui duas fábricas que produzem o mesmo artigo. A fábrica 1 tem uma produção diária de 1000 unidades, 100 das quais com defeito. A fábrica 2 produz diariamente 4000 unidades, 200 das quais com defeito. De um lote, contendo produtos das duas fábricas, é escolhido aleatoriamente um exemplar e verifica-se que tem defeito. Qual a probabilidade de que esse exemplar seja oriundo da fábrica 1?

Seja $\boldsymbol{B}$ o acontecimento "o exemplar escolhido tem defeito" e $\boldsymbol{A}$ o acontecimento "o exemplar provém da fábrica 1". O que se pretende saber é $P(A|B)$.

São necessárias as seguintes probabilidades:

$$P(B) = \frac{300}{5000} = 0{,}06$$

$$P(A \cap B) = \frac{100}{5000} = 0{,}02$$

Consequentemente, e recorrendo à definição de probabilidade condicionada, resolve-se o problema da seguinte forma:

$$P(A \backslash B) = \frac{100/_{5000}}{300/_{5000}} = \frac{1}{3} \cong 0{,}33$$

Baseado em Meyer (1991)

Teorema 1.6.2.1 [*Teorema da probabilidade composta*]**:** Sejam $\boldsymbol{A}\, e\, \boldsymbol{B}$ dois acontecimentos tais que $P(B) > 0$. Então, resulta da definição de probabilidade condicionada:

$$P(A \cap B) = PA|B)P(B)$$

Observação: Nalguns casos, a probabilidade condicionada $P(A|B)$ pode ser igual a $P(A)$, ou seja, o conhecimento da ocorrência de $\boldsymbol{B}$ não afeta a probabilidade de $\boldsymbol{A}$ ocorrer.

Definição 1.6.2.2. (Murteira & Pimenta, 2007)[*Partição do espaço de resultados*]**:** Dizemos que $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \dots, \boldsymbol{A}_k$,é uma partição do espaço de resultados **Ω** quando:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j \quad \text{ e } \quad \bigcup_1^k A_i = \Omega$$

Teorema 1.6.2.2 (Murteira & Pimenta, 2007)[*Teorema da probabilidade total*]: Sejam $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \dots, \boldsymbol{A}_k$, uma partição do espaço de resultados **Ω,** com $P(A_i) > 0$, $\forall i$. Dado um qualquer acontecimento $\boldsymbol{A}$, tem-se:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)$$

Exemplo 1.6.2.3: Uma loja de brinquedos tem, na época de Natal, três pessoas a embalarem os presentes. A pessoa 1 embrulha 30% dos presentes, esquece-se de tirar o preço 3% das vezes e troca a cor das fitas (rosa para meninos e azul para meninas) 4% das vezes; a pessoa 2 embrulha 20% dos presentes, esquece-se de tirar o preço 8% das vezes e troca a cor das fitas 2% das vezes; finalmente a pessoa 3 embrulha os restantes presentes, esquece-se de tirar o preço 5% das vezes e troca a cor das fitas 8% das vezes. Qual a probabilidade de um presente sair da loja com o preço? Qual a probabilidade de levar um presente com fita de cor errada?

Denomine-se por $\boldsymbol{A_1}$"o presente foi embrulhado pela pessoa 1", por $\boldsymbol{A_2}$ "o presente foi embrulhado pela pessoa 2", por $\boldsymbol{A_3}$ "o presente foi embrulhado pela pessoa 3", por $\boldsymbol{B}$ "o presente sai da loja com o preço" e por $\boldsymbol{C}$ "o presente leva a fita de cor trocada".
Para começar, como, o mesmo presente não é embrulhado por duas pessoas, então:
$A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, $i, j = 1,2,3$. Por outro lado, $P(A_1) = 0{,}3$, $P(A_2) = 0{,}2$ e $P(A_3) = 0{,}5$. Então, $P(A_i) > 0$ para $i = 1,2,3$. Está-se, portanto, nas condições do teorema da probabilidade total.
Tendo em conta que:

$$P(B|A_1) = 0{,}03$$

$$P(B|A_2) = 0{,}08$$

$$P(B|A_3) = 0{,}05$$

$$P(C|A_1) = 0{,}04$$

$$P(C|A_2) = 0{,}02$$

$$P(C|A_3) = 0{,}08$$

poder-se-ão, finalmente, calcular as probabilidades pretendidas.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i) =$$

$$= 0{,}03 \times 0{,}3 + 0{,}08 \times 0{,}2 + 0{,}05 \times 0{,}5 = 0{,}05$$

$$P(C) = \sum_{i=1}^{3} P(C|A_i)P(A_i) =$$

$$= 0{,}04 \times 0{,}3 + 0{,}02 \times 0{,}2 + 0{,}08 \times 0{,}5 = 0{,}056$$

Poder-se-á, então, afirmar que 5% dos presentes saem da loja ainda com preço e 5,6% dos presentes levam a fita de cor errada.

Adaptado de Murteira & Pimenta (2007)

1.6.3. Teorema de Bayes

No parágrafo 1.6.2, foi visto como calcular a probabilidade de $\boldsymbol{B}$ supondo a ocorrência de algum ou alguns dos $\boldsymbol{A_i}$, mas nada foi dito acerca de como calcular a probabilidade de cada $\boldsymbol{A_i}$ supondo que $\boldsymbol{B}$ ocorre. No exemplo 1.6.2.3, com os conhecimentos adquiridos, conseguiu-se calcular a probabilidade de um presente sair da loja com o preço. Contudo, se se supuser que o presente saiu da loja com o preço, ainda não somos capazes de calcular qual a probabilidade de o presente ter sido embrulhado pela pessoa 1. O resultado que permite calcular tal probabilidade é conhecido por **fórmula de Bayes** e é seguidamente apresentado na forma de teorema.

Teorema 1.6.3.1[Murteira & Pimenta (2007)]**:** Se $(\boldsymbol{A_n})$, é uma partição de $\boldsymbol{\Omega}$ tal que $P(A_n) > 0$ e se $\boldsymbol{B}$ é um acontecimento de probabilidade positiva, , então:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \times P(B \backslash A_i)}{P(A_1) \times P(B|A_1) + P(A_2) \times P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \times P(B|A_n)}$$

Exemplo 1.6.3.1: Uma empresa produz para o mercado nacional e para exportação, sendo a produção para o mercado nacional metade da produção destinada à exportação. Com base no controle de qualidade à produção anterior, admite-se que 10% dos produtos lançados no mercado interno apresentam deficiências, sendo essa percentagem de 3,3% na produção destinada ao mercado externo.

i) Qual a percentagem de produtos defeituosos na produção total da empresa?

ii) Determinado produto foi considerado defeituoso. Qual a probabilidade de ter sido produzido para exportação?

iii) Determinado produto foi considerado sem defeitos de fabrico. Qual a probabilidade de ter sido produzido para o mercado nacional?

Sejam $\boldsymbol{A_1}$ "o produto é destinado ao mercado nacional", $\boldsymbol{A_2}$ "o produto é destinado à exportação" e finalmente $\boldsymbol{B}$ "o produto apresenta deficiências".

Tem-se que a produção destinada ao mercado nacional é metade da produção destinada à exportação. Como é óbvio, o produto ou é para consumo nacional ou para exportação, logo, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2 = \Omega$.

Consequentemente, vem:

$$P(A_1) = \frac{1}{2}P(A_2)$$

e

$$P(A_1) + P(A_2) = 1$$

.

Resolvendo este sistema de duas equações a duas incógnitas, obter-se-ão os seguintes resultados:

$$P(A_1) = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

e

$$P(A_2) = \frac{2}{3} \approx 0{,}66$$

i) Calcular a percentagem de produtos defeituosos na produção total da empresa é calcular $\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{B})$.

Tomando em consideração que $P\ (B|A_1)\ =\ 0{,}1$ e que $P\ (B\ |A_2)\ =\ 0{,}033$ e recorrendo ao teorema da probabilidade total, tem-se:

$$P\ (B)\ =\ \frac{1}{3} \times 0{,}1\ + \frac{2}{3}\ \times 0{,}033\ \approx\ \ 0{,}055.$$

Então, a percentagem de produtos defeituosos que são produzidos é aproximadamente 5,5%.

ii) Nesta alínea o que se pretende saber é $P\ (A_2\ |B)$.

Utilizando a **fórmula de Bayes**:

$$P\,(A_2|\,B) \;=\; \frac{{}^{2}\!/_{3} \times 0{,}033}{0{,}055} \;=\; 0{,}4.$$

A interpretação deste resultado é a resposta ao ponto ii), ou seja, a probabilidade de um produto defeituoso ter sido produzido para o mercado estrangeiro é **0,4**.

iii) Pretende-se aqui conhecer $P\,(A_1|\bar{B})$.

Utilizando o teorema 1.5.2.3, pode calcular-se $P\,(\bar{B})$:

$$P\,(\bar{B}) \;=\; 1 \;-\; P\,(B) \;=\; 1 \;-\; 0{,}055 \;=\; 0{,}945.$$

Para que se possa utilizar a **fórmula de Bayes**, precisa-se ainda do valor de $P\,(\bar{B}|A_1)$.

Utilizando novamente o teorema 1.5.2.3, tem-se:

$$P\,(\bar{B}|A_1) \;=\; 1 \;-\; P\,(B\backslash A_1) \;=\; 1 \;-\; 0{,}1 \;=\; 0{,}9.$$

Finalmente, utilizando a **fórmula de Bayes**, poder-se-á calcular $P\,(A_1|\bar{B})$:

$$P\,(A_1|\bar{B}) \;=\; \frac{{}^{1}\!/_{3} \times 0{,}9}{0{,}954} \;\approx 0{,}314.$$

Tem-se, então, que a probabilidade de um produto sem defeitos ser produzido para o mercado nacional é aproximadamente **0,314**.

Adaptado de Gnedenko (1968)

Exemplo 1.6.3.2: Uma empresa fabrica baterias para automóveis. Com a finalidade de não afetar a imagem da empresa por vender baterias defeituosas, esta testa algumas das baterias que produz. Contudo, o teste não é infalível, ou seja, baterias em bom estado, após testadas, poderão ser consideradas como estando em mau estado e baterias em mau estado, após o teste ser efetuado, poderão ser consideradas como estando em bom estado. De acordo com a secção de controlo de qualidade constata-se o seguinte:

- De todas as baterias em mau estado, 95% são testadas e consideradas como defeituosas.

- De todas as baterias em bom estado, 98% são testadas e consideradas como estando em bom estado.

Sabe-se que 5% da produção diária de baterias apresenta defeitos. Pede-se:

i) Se uma bateria, escolhida da produção diária, for testada e considerada em mau estado, qual a probabilidade de que, de facto, esteja em mau estado?
ii) Qual a probabilidade de que a bateria da alínea i) esteja em bom estado?
iii) Qual a probabilidade de uma bateria em mau estado seja considerada como estando em bom estado?
iv) Se a empresa testasse todas as baterias, rejeitando as que, após o teste, forem consideradas como estando em mau estado (supõe-se que as percentagens de erro do teste não se alteram), que percentagem de baterias teria a empresa de rejeitar?

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

$\boldsymbol{A_1}$ = "a bateria está em mau estado"

$\boldsymbol{A_2}$ = "a bateria está em bom estado"

$\boldsymbol{B}$ = "a bateria é experimentada e considerada em mau estado".

São dados do problema os seguintes resultados:

$$P\,(A_1) = 0{,}05 \qquad , \qquad P\,(B\,|A_1) = 0{,}95,$$
$$P\,(A_2) = 0{,}95 \qquad e \qquad P\,(B\,|\,A_2) = 0{,}02.$$

i) O valor que nesta alínea é pedido é o valor de $P\,(A_1\,|\,B)$. O teorema 1.6.3.1 permite escrever:

$$P\,(A_1\,|\,B) = \frac{0{,}05 \times 0{,}95}{0{,}05 \times 0{,}95 + 0{,}95 \times 0{,}02} \approx 0{,}714.$$

ii) Aqui o que se tem de calcular é $P\,(A_2\,|\,B)$. Esta alínea pode ser resolvida de duas formas.

1ª $Forma$: É lícito recorrer ao teorema 1.5.2.4 visto $\boldsymbol{A_1}\ e\ \boldsymbol{A_2}$ serem acontecimentos complementares um do outro e $P\ (A|B)$ ser uma probabilidade, tem-se então:

$$P\ (A_2|B)\ =\ 1\ -\ P\ (A_1|B)\ =\ 1\ -\ 0{,}714\ =\ 0{,}286.$$

2ª $Forma$: A **fórmula de Bayes** permite escrever

$$P\ (A_1|\ B)\ =\ \frac{0{,}95\ \times\ 0{,}02}{0{,}05\ \times\ 0{,}95\ +\ 0{,}95\ \times\ 0{,}02}\ =\ 0{,}286.$$

iii) É um dado do problema que $P\ (B\backslash A_1)\ =\ 0{,}95$. Pretende-se $P\ (\bar{B}|A_1)$. Recorrendo novamente ao teorema 1.5.2.4 vem:

$$P\ (\bar{B}|\ A)\ =\ 1\ -\ P\ (B|A_1)\ =\ 1\ -\ 0{,}95\ =\ 0{,}05.$$

O valor pedido é portanto 0,05.

iv) Necessita-se de calcular $P(B)$, recorrendo-se para tal ao teorema da probabilidade total. Vem:

$$P\ (B)\ =\ 0{,}05 \times 0{,}95\ +\ 0{,}95 \times 0{,}02\ =\ 0{,}0665.$$

A percentagem de baterias que a fábrica teria de rejeitar, caso todas fossem inspecionadas, seria 6,65% da produção total.

Adaptado de Meyer,(1991)

Exemplo 1.6.3.3: Uma determinada padaria fabrica em quantidades iguais três formatos de bolo-rei, um de 250 gr, um de 350 gr e um de 500 gr.

Na produção é colocada uma fava em metade dos bolos mais pequenos, uma fava em um terço dos bolos médios e uma fava em um quarto dos bolos maiores. O brinde somente é colocado em alguns dos bolos maiores que contenham fava, pelo que, a referida padaria foi acusada de apenas uma pequena parte dos bolos conterem brinde. A padaria defendeu-se, dizendo que pelo menos um quarto dos bolos com fava continha brinde. Será tal afirmação correta?

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

$\boldsymbol{A_1}$ = "o bolo pesa 250 gr",

$\boldsymbol{A_2}$ = "o bolo pesa 350 gr",

$\boldsymbol{A_3}$ = "o bolo pesa 500 gr",

$\boldsymbol{B}$ = "o bolo contém fava".

São dados do problema, os seguintes valores:

$$P\,(A1) = 1/3 \quad , \quad P\,(A_2) = 1/3 \quad e \quad P\,(A_3) = 1/3.$$

O brinde é posto somente em alguns bolos de 500 gr que contenham fava, consequentemente, se dos bolos que contêm fava os de 500 gr não forem um quarto, então a afirmação da padaria não poderá ser verdadeira.

O que se pretende portanto saber é $P\,(A_3\,|B)$.

$$P\,(A_3\,|B) = \frac{1/3 \times 1/4}{1/2 \times 1/3 + 1/3 \times 1/3 + 1/4 \times 1/3} \approx 0{,}23\,.$$

Poder-se-á, então, dizer com toda a segurança que, a afirmação feita pela padaria é falsa, visto que, mesmo que em todos os bolos de 500 gr que contêm fava fosse colocado um brinde, a percentagem dos bolos com fava que contivessem brinde seria de 23 %.

Adaptado de Caeiro (2009)

Exemplo 1.6.3.4: De acordo com o registo de uma empresa, as 3.400 toneladas de produto vendidas durante o ano passado tiveram a seguinte proveniência:

Tabela 2 – Produto Fornecido

Fornecedor	Quantidade fornecida (T)
A	650
B	725
C	850
D	550
E	625

As quantidades que, nesse ano, foram devolvidas aos fornecedores por deficiência de fabrico, tiveram a seguinte distribuição:

Tabela 3 – Produto Devolvido

Fornecedor	Devoluções (T)
A	20
B	30
C	55
D	35
E	50

Suponhamos que, as percentagens, tanto de produto fornecido, como de devolvido, se mantêm durante este ano. Uma certa quantidade desse produto foi devolvida por parte de um cliente, à empresa, visto encontrar-se em condições defeituosas de fabrico. Qual o fornecedor mais provável dessa quantidade de produto?

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

A_1 = "o produto foi fornecido por A",

A_2 = "o produto foi fornecido por B",

A_3 = "o produto foi fornecido por C",

A_4 = "o produto foi fornecido por D",

A_5 = "o produto foi fornecido por E",

B = "o produto é defeituoso".

O que se pretende determinar é, sabendo que o produto é defeituoso, qual o fornecedor mais provável, ou seja, qual é o máximo dos $P\ (A_i\ |B), com\ i =\ 1, \dots, 5$.

Recorrendo à **fórmula de Bayes**, poder-se-á formar a seguinte tabela:

Tabela 4 – Qual o fornecedor mais provável

A_i	$P\ (A_i)$	$P\ (B\ \backslash A_i)$	$P\ (B\ \backslash A_i) \times P\ (A_i)$	$P\ (A_i\ \backslash B)$
A_1	0,191	0,031	0,006	0,107
A_2	0,213	0,041	0,009	0,161
A_3	0,250	0,065	0,016	0.286
A_4	0,162	0,064	0,010	0,179
A_5	0,184	0,080	0,015	0,268
	1		$P\ (B)$ = 0,056	$\cong 1$

Pela análise da tabela anterior, poder-se-á afirmar que o fornecedor mais provável do produto defeituoso é o fornecedor C.

Baseado em Meyer (1991)

1.6.4. Independência

Nos pontos anteriores, foram analisadas situações em que a ocorrência de um determinado acontecimento, influenciava a probabilidade de ocorrência de outro ou outros acontecimentos. Contudo, existem situações importantes em que o conhecimento da ocorrência de um acontecimento em nada influencia a probabilidade de ocorrência de outro, ou outros acontecimentos.
Este facto pode ser traduzido por uma das seguintes formas:

$$P\,(A\,|B\,) = \,P\,(A) \quad ou \quad P\,(B|A\,) = \,P\,(B),$$

onde $\boldsymbol{A}\ e\ \boldsymbol{B}$ são dois acontecimentos de probabilidade não nula.

De qualquer destas igualdades tira-se que:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Esta relação é utilizada na definição de *acontecimentos independentes*, para quaisquer acontecimentos $\boldsymbol{A}\ e\ \boldsymbol{B}$ de um espaço de resultados **Ω.** Note-se que tal definição não impõe qualquer restrição às probabilidades dos acontecimentos.

Definição 1.6.4.1: Dois acontecimentos, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$**,** dizem-se **independentes** quando:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Se um dado acontecimento $\boldsymbol{A}$ tem probabilidade zero, é óbvio que ele é independente de todo e qualquer acontecimento, em particular, o conjunto $\emptyset$ é independente de qualquer acontecimento. Por outro lado, todo o acontecimento é independente do acontecimento **Ω**

Exemplo 1.6.4.1: Um determinado circuito eletrónico é formado por um integrado e um transístor. O integrado é escolhido de um lote de 100, 10 dos quais apresentam deficiências. O transístor é selecionado a partir de um lote de 300, 15 dos quais são defeituosos. Sejam $\boldsymbol{A}$ o acontecimento "o integrado do circuito é defeituoso" e $\boldsymbol{B}$ o acontecimento "o transístor do circuito é defeituoso". Tem-se:

$$P\,(\,A\,) = \frac{10}{100} \,=\, 0{,}1 \qquad e \qquad P\,(\,B\,) = \frac{15}{300} \,=\, 0{,}05.$$

O número total de circuitos que é possível de formar nestas circunstâncias é 100×300, dos quais, 10×15 têm ambas as partes defeituosas, ou seja, $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ ocorre de 10×15 formas diferentes. Temos:

$$P\,(\,A \cap\, B\,) = \frac{10 \times 15}{100 \times 300} \,=\, 0{,}005 \,=\, 0{,}1 \times 0{,}05 \,=\, P\,(\,A\,) \times P\,(\,B\,)$$

Os acontecimentos $\boldsymbol{A}\ e\ \boldsymbol{B}$ são, portanto, independentes, como seria de esperar.

Baseado em Murteira & Pimenta (2007)

Exemplo 1.6.4.2: Suponha-se o lançamento de uma moeda viciada ou "não regular". Denomine-se por p a probabilidade de sair cara, claro que $0 \,\leq\, p \,\leq 1$. Temos:

$$P\,(\,F\,) \,=\, p \qquad e \qquad P\,(\,C\,) \,=\, 1 \,-\, p.$$

Em três lançamentos dessa moeda, considerem-se os acontecimentos:

$$A = \{ FFF, FFC, FCF, CFF \}$$
$$B = \{ FFF, CCC \}$$

Tem-se:

$$P(A) = p^3 + 3p^2(1 - p),$$
$$P(B) = p^3 + (1 - p)^3 \quad e \quad P(A \cap B) = p^3 .$$

Seria de relativa facilidade verificar que a igualdade:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, só acontece nos casos triviais $p = 0$, $p = 1$ e quando $p = \frac{1}{2}$.
Estamos, portanto, na presença de um caso em que os acontecimentos $\boldsymbol{A}\, e\, \boldsymbol{B}$ são independentes, ou não, consoante o valor que for atribuído a $\boldsymbol{p}$.

Adaptado de Murteira & Pimenta (2007)

Exemplo 1.6.4.3: Um sistema é constituído apenas por duas componentes, C_1 e C_2, que funcionam em "paralelo". Isto significa que as componentes estão ligadas de tal forma que o sistema deixa de funcionar somente se ambas as componentes falharem. Admite-se que as componentes trabalham independentemente e que a probabilidade de cada componente falhar é 0,1. Qual a probabilidade de que o sistema funcione?

Definam-se os seguintes acontecimentos.

$\boldsymbol{A} =$ "$a\ componente\ C_1\ funciona$" e $\boldsymbol{B} =$ "$a\ componente\ C_2\ funciona$".

No enunciado do problema é dito que:

$$P(\bar{A}) = 0{,}1 \quad \text{e} \quad P(\bar{B}) = 0{,}1.$$

O sistema só não funciona quando $C_1 \, e \, C_2$ falham simultaneamente, ou seja, quando ocorre o acontecimento $(\bar{A} \cap \bar{B})$. Pelo teorema 1.5.2.2 e pela definição 1.6.4.1, temos:

$$\begin{aligned} P\,(\,o\ sistema\ funciona\,) &= 1 - P\,(o\ sistema\ \text{não}\ funciona\,) = \\ &= 1 - P\,(\bar{A} \cap \bar{B}) = \\ &= 1 - [P\,(\bar{A}) \times P\,(\bar{B})\,] = \\ &= 0{,}99. \end{aligned}$$

Baseado em Murteira & Pimenta (2007)

Exemplo 1.6.4.4. Um saco contém quatro bolas numeradas de um a quatro. A experiência aleatória consiste em tirar ao acaso uma das bolas e registar o seu número. Sejam os acontecimentos compostos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \, e \, \boldsymbol{C}$ definidos por $\boldsymbol{A} = \{1,2\}$, $\boldsymbol{B} = \{1,3\}$ e $\boldsymbol{C} = \{1,4\}$. Sem dificuldade, obtém-se $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.

Além disso:

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$, $\quad P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$, $\quad P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$,

o que implica que os acontecimentos são independentes dois a dois. No entanto, como se tem $A \cap B \cap C = \{1\}$, obtém-se:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

Baseado em Murteira & Pimenta (2007)

Exemplo 1.6.4.5. Suponha-se uma moeda " regular" que é lançada três vezes. O número de casos possíveis é igual a 8. Sejam os acontecimentos

$$A = \{ CCC, FCC, CFF, FFF \}$$
$$B = \{CCF, CFC, FFC, FFF\}$$
$$C = \{ CCF, CFC, FCF, FFF \}.$$

Facilmente se conclui que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ e que

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{FFF\} = \frac{1}{8}$$

O que nos levaria a pensar que os acontecimentos são independentes. No entanto, $P(B \cap C) = P(\{CCF, CFC, FFF\}) = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{4} = P(B)P(C)$

Baseado em Murteira & Pimenta (2007)

Exemplo 1.6.4.6. Suponhamos que lançamos dois dados. Define-se os acontecimentos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ da seguinte forma:

$$\boldsymbol{A} = \{o\ primeiro\ dado\ mostra\ um\ número\ par\}$$

$$\boldsymbol{B} = \{o\ primeiro\ dado\ mostra\ um\ número\ ímpar\}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{Bmatrix} ambos\ os\ dados\ mostram\ números\ pares \\ ou\ ambos\ mostram\ números\ ímpares \end{Bmatrix}$$

Temos $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.

Além disso $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

Logo, os três acontecimentos são todos independentes dois a dois.

Contudo, $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$

Baseado em Meyer (1991)

Os três exemplos anteriores sugerem que é indispensável alterar a definição de independência, quando se consideram três ou mais acontecimentos, o que leva à seguinte definição:

Definição 1.6.4.2. [Murteira & Pimenta (2007)]: **Independência Completa ou mútua:** Os acontecimentos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ do mesmo espaço de resultados dizem-se completamente independentes ou mutuamente independentes se e só se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C), \quad P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

Facilmente se conclui que esta definição pode ser extensiva a quatro ou mais acontecimentos.

Por exemplo, deverá ter-se independência dois a dois, três a três e $P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A)P(B)P(C)P(D)$.

Outra extensão do conceito de independência é a seguinte:

Definição 1.6.4.3. [Murteira & Pimenta (2007)]: **Independência Condicional:** Dois acontecimentos $\boldsymbol{A}\ e\ \boldsymbol{B}$, são independentes condicionalmente em relação a um acontecimento $\boldsymbol{C}$ se e só se:

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C).$$

Capítulo 2. Magia Matemática com Probabilidades

"Aquele que deseja estudar ou exercer a MAGIA deve cultivar a MATEMÁTICA"

(Matila Ghyka)

2.1. Magia utilizando jogos e o conhecimento matemático

A utilização de jogos e materiais lúdicos nas aulas de matemática tem-se mostrado bastante útil na fixação e compreensão de conteúdos, além de torná-las mais atrativas. Partindo desse contexto, podemos pensar nas magias com cartas de baralhos ou dados como uma ferramenta para atrair a curiosidade dos nossos alunos na descoberta de como é possível a realização de tal feito e onde está a matemática nesse universo. A maioria dos números de magia feitos com cartas utilizam propriedades e padrões matemáticos.

Vejamos algumas dessas magias em que se utilizam padrões matemáticos e cálculo de probabilidades.

2.2. Princípio de Kruskal

O "Princípio de Kruskal" é um truque de cartas inventado pelo matemático e físico americano Martin *David Kruskal (1925 - 2006).* Este foi publicado pela primeira vez em 1975 por Karl Fulves e Martin Gardner. Mais tarde em 2001, o princípio foi analisado, detalhadamente, num artigo científico, escrito por J. C. Lagarias, E.Rains e R. J. Vanderbei (2009)

Este truque pode ser apresentado em qualquer altura e sem preparação prévia a um ou mais indivíduos. O espetador e o mágico fazem cada um, uma contagem de cartas, aparentemente aleatórias. No entanto o mágico consegue, a maior parte das vezes, parar na mesma carta do espetador.

2.2.1. Martin David Kruskal (1925-2006)

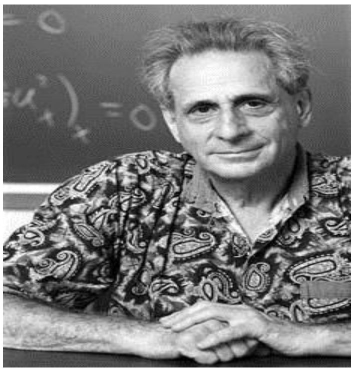

Figura 13 – Martin David Kruskal

Martin David Kruskal nasceu em 1925, em Nova Iorque e morreu no dia 26 de dezembro de 2006. É considerado um dos investigadores mais perspicazes e inovadores nas áreas da matemática aplicada e da física.

Licenciou-se em matemática na Universidade de Chicago em 1945, tendo-se mudado mais tarde para Nova Iorque, onde frequentou o mestrado e ainda o doutoramento sob a orientação de Richard Courant e Bernard Friedman, com a tese intitulada "The Bridge Theorem for Minimal Surfaces", que data de 1952.

Trabalhou no, inicialmente secreto, "Projeto Matterhorn", que tinha o objetivo de usar a fusão nuclear controlada como fonte de energia. Kruskal foi um grande apoio para o diretor do projeto, Lyman Spitzer, tendo fornecido conhecimentos na análise e modelagem matemática cruciais para formular os fundamentos teóricos para a fusão controlada e o campo da física de plasma. Depois de se tornar público, o projeto deu origem ao Laboratório de Física de Plasma, em Princeton, do qual Kruskal se tornou, a princípio, Chefe Adjunto da Divisão Teórica e, posteriormente, Investigador Sénior Associado, combinando o seu conhecimento sofisticado de matemática com uma forte intuição, quer na técnica matemática, quer na aplicação da física.

O matemático e físico é também reconhecido pela conceção de métodos modernos de assintótica e por ter obtido importantes resultados sobre a estabilidade do plasma. É ainda de realçar a sua investigação sobre a "Métrica de Schwarzschild" que deu origem às coordenadas Kruskal-Szekeres. Em 1961, Kruskal tornou-se professor de Ciência Astrofísica, em Princeton, e mais tarde, também professor de Matemática. De 1968 a 1986 foi diretor do programa de Matemática Aplicada e Computacional. Apesar de associar a investigação ao cargo de professor, Kruskal foi sempre considerado um professor entusiástico, tendo lecionado até ao final da sua vida.

A mais universal contribuição de Kruskal para a ciência é a "*Teoria dos Solitons"*. O conceito de "*solitons"*, ou "ondas solitárias", originou-se em Edimburgo, em 1834, quando John Scott Russel iniciou uma investigação no Union Canal, em Hermiston, em que tentou compreender e reduzir o arrasto em barcos do canal. Uma investigação que continuou por mais um século, com vários protagonistas, mas sem grande relevância, até que, mais tarde, Kruskal, em parceria com Norman Zabusky, enquanto realizavam cálculos numéricos numa rede atómica, se aperceberam de algumas propriedades de colisão de impulsos de energia: depois de colisões múltiplas, os impulsos saiam intactos. Apesar da grande disparidade de escala com ondas de água, Kruskal viu a analogia com as soluções de ondas solitárias da equação de Korteweg-de Vries, o que o levou a procurar uma explicação matemática subjacente. E encontrou-a.

Depois da revelação de Kruskal, a teoria acabou por ganhar fama e ser alargada por vários países, incluindo a então União Soviética, o Japão, a Itália, a Grã-Bretanha. A "*Teoria dos Solitons"* tem estimulado também uma vasta atividade na teoria de sistemas integrados, que continua a gerar novas ligações à geometria e à análise clássica, agora apoiados pelas novas tecnologias.

Nos seus anos eméritos, e depois de ter lecionado também na Universidade de Rutgers, Kruskal revitalizou a análise assintótica, tendo sido seu o maior contributo para o desenvolvimento da assintótica exponencial, que explica os efeitos frequentes que os procedimentos-padrão ignoravam. Kruskal tornou-se ainda fascinado por números "surreais", descobertos por Conway, com o qual colaborou, descobrindo várias propriedades que permitissem o cálculo de números surreais.

Kruskal recebeu diversos prémios em homenagem ao seu trabalho, incluindo a Medalha Nacional da Ciência, em 1993, o Leitorado Gibbs, em 2006, o prémio Steele da Sociedade Americana de Matemática, em 2006; e o Prémio Maxwell do Congresso Internacional de Matemática Industrial e Aplicada, em 2003. Foi membro da Academia Nacional das Ciências (1980), membro estrangeiro da Real Sociedade de Londres (1997), da Academia Russa das Ciências (2000) e membro honorário da RSE (2001).

2.2.2. Uma explicação do "Principio de Kruskal" segundo Mariano Tomatis (2008)

2.2.2.1. Quem é Mariano Tomatis

Figura 14 - Mariano Tomatis

Mariano Tomatis é um escritor e matemático italiano, autor de vários livros tais como: "2012, Em causa está o fim do mundo"; "A magia dos números", "A magia da mente", "Números Assassinos", entre muitos outros.

É autor de vários projetos e já recebeu vários prémios. Tem um blog "*Blog of Wonders"* onde descreve vários truques ou enigmas matemáticos e é diretor do periódico "*Praestigiador"*

Mariano Tomatis (2008) diz *"…a matemática parte da magia e de zonas fronteiriças e traiçoeiras do conhecimento onde se reúnem os fenómenos paranormais, os poderes da mente, as profecias, os grandes enigmas históricos e símbolos esotéricos."*

2.2.2.2. As regras do jogo

1. Poem-se sobre uma mesa, um baralho de 52 cartas, com as faces voltadas para cima, da esquerda para a direita, numa única fila (alternativamente o mágico mostra as cartas uma a uma sequencialmente).
2. Escolhe-se uma das primeiras dez cartas à esquerda. O seu valor indicar-nos-á quantas cartas deveremos deslocarmos para a direita, a partir dela, por exemplo, se escolhermos um três, deveremos passar à terceira carta sucessiva. As figuras valem 1.
3. O valor da nova carta indicar-nos-á quantas cartas deveremos deslocar-nos de novo à direita (se, por exemplo, sair um Ás, deveremos deslocarmos para a carta seguinte).
4. Continuamos as deslocações que, de cada vez, serão indicadas pela carta escolhida, até que atinjamos o fim do baralho, mais concretamente a carta a partir da qual não podemos deslocamos mais sem ultrapassar a ultima.
   Embora pareça impossível, o ilusionista é capaz de prever qual será esta carta final!

Como outros efeitos similares, não é matematicamente certo que funcione. Escolhidas de modo justo, as condições que estão na base do jogo permitem apresentá-lo numa versão que atinge a probabilidade de 94% de êxito.

2.2.2.3. A explicação do jogo

Efetivamente, sob o ponto de vista estatístico, revela-se que seja qual for a carta da qual se inicie a escolha entre as primeiras dez, muito frequentemente a carta final coincide com a que se atinge, quando se parte da primeira carta do baralho.

Para o ilusionista, portanto, é suficiente executar mentalmente os saltos a partir da primeira carta do baralho até à carta final, efetuando os saltos indicados, e escrever como previsão o valor da carta sobre a qual se conclui o seu percurso.

Provavelmente, qualquer das primeiras dez cartas que o espetador escolha conduzi-lo-á à carta prevista.

Eis a seguir um exemplo do percurso que o ilusionista pode efetuar mentalmente:

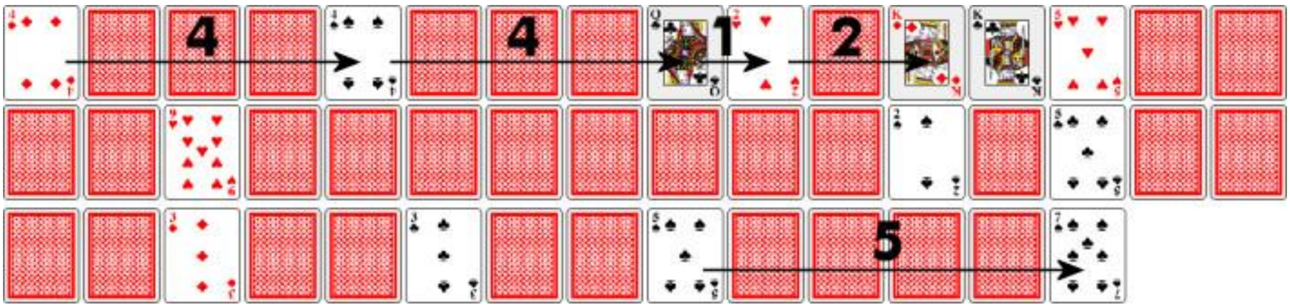

Figura 15 - Percurso que o ilusionista pode efetuar mentalmente

Do 4 de Ouros vai-se para a quarta carta sucessiva, que é um 4 de Espadas; a partir desta, vai-se para a quarta carta seguinte, que é uma Dama de Espadas. Tratando-se de uma figura (que, portanto, vale 1), vai-se imediatamente para a carta seguinte, que é um 2 de Copas. Desta salta-se para a segunda carta à direita, que é um Rei de Ouros e assim sucessivamente, até chegar, finalmente, ao 7 de Espadas. Tratando-se da 48ª carta, paremos aqui: seria impossível prosseguir para além da 52ª carta.

Portanto, o ilusionista escreve no seu caderno de apontamentos, "Sete de Espadas": provavelmente, partindo de uma qualquer das primeiras dez cartas, o espetador terminará a conta precisamente, sobre o sete de espadas.

Isto sucederá com frequência, mas...com que frequência? Por outras palavras: qual é a probabilidade de a previsão ser correta?

Segundo Mariano Tomatis (2008), as probabilidades foram calculadas com uma simulação de Monte Carlo que tomou em consideração 5000 baralhos de cartas diversos.

Visto que é possível mudar as condições de partida, foram avaliadas situações diferentes. Nas variantes analisadas, tomaram-se em consideração:

a) o número de cartas no baralho inicial;
b) o valor dado às figuras (Valete, Dama, Rei);
c) a dimensão do conjunto de cartas donde o espetador decide partir;
d) a posição da carta da qual parte o ilusionista, a fim de fazer a previsão;

Verificou-se o seguinte: o baralho de 40 cartas é o pior que se pode usar; utilizando os quatro símbolos das cartas até 10 (portanto, excluindo as figuras), as probabilidades de sucesso andam à volta de 77% (coluna vermelha no gráfico 1); utilizando, pelo contrário, todas as 52 cartas (dando o valor de 1 às figuras), as probabilidades são de 94% (coluna Verde no gráfico 1). No gráfico 1 são apresentadas as probabilidades, em função do número de cartas utilizadas (cada baralho é constituído por uma carta de cada naipe para cada número ou figura considerados, ou seja, a dimensão do baralho é sempre um múltiplo de quatro). Como se explica o salto entre a penúltima e última coluna?

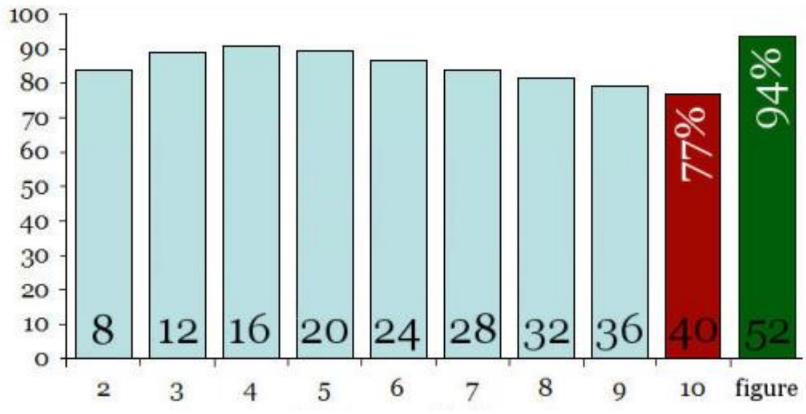

Gráfico 1 – Probabilidade de sucesso em função do número de cartas utilizadas

O salto explica-se com o facto de as probabilidades aumentarem com o aumento de número de saltos do percurso da primeira carta escolhida até à última. Se, num baralho de cartas, há muitas cartas de alto valor, os saltos mais longos reduzem o número de cartas que são tocadas durante o percurso e isto diminui as probabilidades de sucesso. Atribuindo às figuras o valor 1, maximiza-se o comprimento dos percursos, melhorando as prestações do baralho.

No gráfico 2, estão ilustradas as probabilidades de um baralho de 52 cartas ao variar os valores atribuídos às figuras. Como se vê, o melhor valor é o valor 1 (coluna verde do gráfico 2).

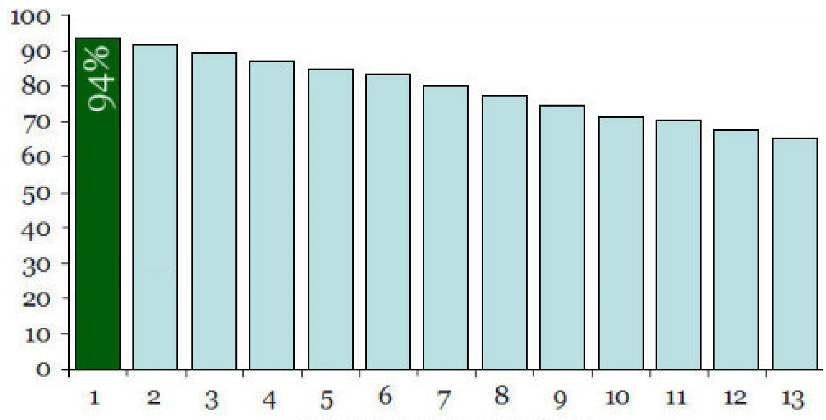

Gráfico 2 – Probabilidades de sucesso de um baralho de 52 cartas ao variar os valores atribuídos às figuras

Por outro lado, o espetador pode decidir iniciar de uma das primeiras dez cartas. Quanto maior for a dimensão de escolha que lhe é concedida, menores são as probabilidades que o efeito se conclua com sucesso.

Obviamente, se o espetador é constrangido a partir da primeira carta, em todas as vezes o jogo funciona 100%. É necessário encontrar um equilíbrio justo, de modo que o espetador se aperceba da sua plena liberdade, mas que, simultaneamente, não estenda a todo o baralho a possibilidade de iniciar a contagem.

O valor 10, escolhido no início, é totalmente arbitrário e garante a já citada probabilidade de 94%. Se o espetador pudesse escolher iniciar desde uma qualquer das 52 cartas, as probabilidades seriam cerca de 72%. Na realidade, trata-se de um caso limite, impossível de apresentar: existe, efetivamente, o risco que a carta da qual o espetador deseja iniciar seja sucessiva à carta prevista, o que baixa, posteriormente, a percentagem estimada. Com efeito, o 72% não considera esta eventualidade.

Pode ser útil relevar que o jogo obtém sucesso em 90% dos casos, se ao espetador é concedido escolher uma das primeiras 20 cartas, pelo contrário, desce para 80% se a escolha é alargada às primeiras 43 cartas.

O gráfico 3, mostra como varia a probabilidade conforme se aumenta a dimensão da escolha inicial.

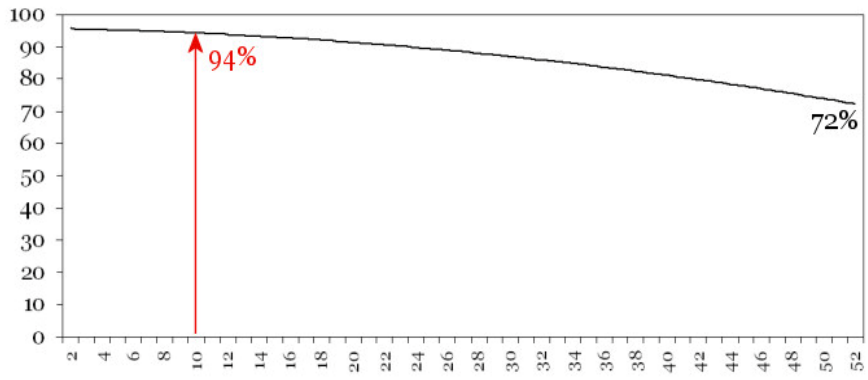

Gráfico 3 – Probabilidade de sucesso conforme se aumenta a dimensão da escolha inicial.

Por último, o facto de o ilusionista não partir da primeira carta, mas da segunda, da terceira, etc., tem uma leve influência sobre a percentagem de êxito, que diminui ao aumentar a posição da carta da qual inicia. Isto é devido ao facto de, afastando-se da primeira posição, o percurso, em média, encurta e, portanto - pelo que se viu antes - diminuem as probabilidades de sucesso. A primeira posição, consequentemente, é a **posição ideal.**

2.2.3. Uma explicação do "Principio de Kruskal" segundo James Grime (2010)

2.2.3.1. Quem é James Grime

Figura 16 - James Grime

James é um matemático, professor e orador, e pode ser muitas vezes encontrado em viagens pelo Reino Unido e pelo mundo a fazer apresentações a propósito do projeto "Millenium Mathematics" da Universidade de Cambridge.

James tem um doutoramento em matemática e os seus interesses académicos incluem teoria de grupo (matemática de simetria/proporção) e combinatória (matemática de cadeias e de resolver problemas com diagramas e imagens). James também nutre um grande interesse por criptografia (a matemática de códigos e mensagens secretas), probabilidade (jogos, apostas e previsões do futuro) e teoria dos números (as propriedades dos números).

James tem uma paixão pessoal por comunicação matemática, pela promoção da matemática em escolas e pelo público em geral. Aparte o seu trabalho para a Universidade de Cambridge, James dá continuidade à sua paixão, desempenhando um papel de líder em muitos outros eventos e organizações, particularmente na sua série de vídeos no Youtube. Detalhes acerca destes projetos estão listados abaixo.

James é um matemático e comunicador motivado, com uma natureza inventiva e divertida na sua comunicação laboral.

O seu trabalho e outros projetos:

Em Setembro de 2008: Projeto Enigma, Projeto Millenium Mathematics, Universidade Cambridge. Viajar pelo Reino Unido e pelo mundo para dar palestras em escolas e ao público em geral, acerca da história e matemática de decifração de códigos, incluindo a demonstração de uma máquina genuína de enigmas da 2ª Guerra Mundial.

O Projeto Enigma envolve falar e cativar um vasto número de escolas por todo o Reino Unido (1º, 2º e 3º ciclo e Secundário) com muita habilidade e variedade de perspetivas. Também envolve palestras noturnas e festivais que incluem audiências adultas e familiares.

Espera, não só fornecer, um conhecimento profundo de matemática, como também apresentá-lo de uma forma acessível e engraçada. Ele redesenhou completamente os recursos utilizados pelos alunos, de forma a ser mais claro, completo e matematicamente acessível e desafiante, com histórias a adicionar cor ao projeto.

Palestras conhecidas incluem o Festival de Ciência da Universidade de Cambridge, a festa alternativa na Embaixada Britânica em Helsínquia – conferência tecnológica da Finlândia, mini-tours de Hong Kong, Espanha e Suíça. Entrevistas com a Radio 2 (Chris Evans programa da manhã), Radio 4 (Mundo à uma), Radio 5 (programa da manhã), imprensa nacional e internacional.

Em 2007, ele fez (quase) semanalmente uma serie caseira de problemas, truques e vídeos de matemática no YouTube. Neste momento consistindo em cerca de 200 vídeos, esta série tem tido cada vez mais popularidade para perto de 20000 assinantes. Os vídeos obtêm centenas de milhões de visualizações no YouTube, e regularmente chegam ao topo das tabelas de matemática do iTunes. Os vídeos são sobre uma grande variedade de tópicos e são feitos tanto para fins de entretenimento como de educação.

2.2.3.2. A probabilidade de sucesso com um baralho

Nesta secção iremos seguir o trabalho de Grime (2010) e apresentar alguns cálculos de probabilidades associadas ao “Princípio de Kruskal”.

Na versão apresentada por Grime (2010) as figuras valem sempre 5 e o baralho tem 52 cartas. Iremos mostrar que em certas condições iniciais, a probabilidade de sucesso, isto é, de o espetador e o mágico acabarem na mesma carta é de 84%. Além disso, podemos aumentar ligeiramente esta probabilidade, para aproximadamente 86%, se o mágico escolher 1 como número inicial.

Ademais, iremos agora mostrar que, se $\boldsymbol{N}$ for o número de cartas, e $\boldsymbol{x}$ for a média do valor das cartas, então a probabilidade de sucesso pode ser aproximada com uma simples fórmula:

$$P(sucesso) \cong 1 - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^N$$

Calcular a probabilidade de sucesso não é fácil. Por isso, iremos simplificar o problema de várias maneiras. A seguinte é baseada em Lagarias, Rains, & Vanderbei (2009).

Primeiro, partirmos do principio que as cartas estão etiquetadas com um número natural $N = \{1,2,3, \dots\}$; (no caso descrito anteriormente*, s*eria um número de $1\ a\ 10.$) Estes números representam os valores das cartas. Esta suposição não se aplicaria a um baralho real, já que, um baralho tem quarenta cartas de valor 1 a 10, mas também tem sem valor as doze figuras. Na prática ultrapassa-se esta dificuldade atribuindo um valor fixo a cada figura, no *"Principio de Kruskal"* as figuras valem 5, cada uma.

Em segundo lugar, assumimos que em vez dos valores estarem limitados de 1 a 10 cada carta é etiquetada com valores determinados por uma distribuição geométrica, o que conduz a um baralho bem diferente do habitual. Como iremos ver mais à frente, esta suposição, apesar de irreal, conduz a valores das probabilidades bastantes próximos dos reais e facilita imenso o cálculo das probabilidades sem recurso a simulações.

Por outras palavras, a probabilidade de que uma carta esteja etiquetada com o número *k* é dada por $p_k = (1-p)p^{k-1}$, para $0 \leq p \leq 1$. Se x for o valor médio das cartas, sabe-se que para a distribuição geométrica $x = \frac{1}{1-p}$. Por outras palavras, $p = \frac{x-1}{x}$ e poderemos agora escrever:

$$p_k = \frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{k-1}$$

Num baralho normal, se as cartas com figura valerem 5, temos um valor de carta médio de $x = \frac{70\times4}{13\times4} = \frac{70}{13} = 5{,}385$. É este o valor que será usado para definir o parâmetro p da distribuição geométrica.

Em terceiro lugar, assumimos que cada jogador escolhe o seu número inicial com a mesma distribuição geométrica. O uso da distribuição geométrica em vez do uso da distribuição uniforme, como seria mais realista, simplifica fortemente os cálculos, ao mesmo tempo que ainda nos dá uma boa aproximação da verdadeira probabilidade. O facto de todas estas simplificações conduzirem a boas aproximações nos cálculos das probabilidades deve-se à *Lei dos Grandes Números* e à utilização da média real como valor da média da distribuição geométrica.

Consideremos agora, um baralho de $\boldsymbol{N}$ cartas. Seja $\boldsymbol{T}$ a "$posição\ de\ junção$", ou seja, a posição no baralho quando os percursos do mágico e do espetador coincidem pela primeira vez. Por exemplo, $P[T = 1]$ é a probabilidade de existir "$junção$" na primeira carta. Isto seria a probabilidade de ambos, o espetador e o mágico, escolherem um valor inicial de 1 e cada um o iria fazer com distribuição geométrica, portanto:

$$P[T = 1] = p_1^2 = \frac{1}{x^2}$$

O "*Princípio de Kruskal*" falha se a "posição de junção" for maior do que o número de cartas. O que significa que a probabilidade de falhar é de $P[T > N]$. Calculemos essa probabilidade:

$$\begin{aligned} P[T > N] &= P[T > N|T = 1]P[T = 1] + P[T > N|T \neq 1]P[T \neq 1] = \\ &= \left(0 \times \frac{1}{x^2}\right) + P[T > N|T \neq 1]\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \\ &= P[T > N - 1]\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Aqui usamos o facto de $P[T > N|T = 1] = 0$, e a "*propriedade da falta de memória"* de uma "*Cadeia de Markov"* de distribuições geométricas que quer dizer:

$$P[T = k|T > 1] = P[T = k - 1], \qquad k \geq 2$$

Continuando recursivamente desta forma, descobrimos:

$$P[T > N] = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^N$$

Por outras palavras:

$$P(sucesso) = 1 - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^N$$

Aplicando este resultado ao *"Princípio de Kruskal"*, onde $x = \frac{70}{13} = 5{,}385$, temos:

$$P(sucesso) = 1 - \left(\frac{5{,}385^2 - 1}{5{,}385^2}\right)^{52} \cong 0{,}8388 \cong 84\%$$

Se, em vez de escolher um número inicial aleatoriamente, o mágico escolher um valor inicial de 1, obtém-se:

$$P(sucesso) = 1 - \left(\frac{x - 1}{x}\right)\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^{N-1}$$

que no caso do "*Principio de Kruskal"* daria:

$$P(sucesso) = 1 - \left(\frac{5{,}385 - 1}{5{,}385}\right)\left(\frac{5{,}385^2 - 1}{5{,}385^2}\right)^{52-1} \cong 0,8641 \cong 86\%$$

Ou seja um valor, muito aproximado, ao que é mostrado, na secção 2.2.2.3, no gráfico 2, coluna 5.

2.2.3.3. Quando as cartas com figuras valem 1

Num baralho normal, se as cartas com figura valerem 1, temos um valor de carta médio de $x = \frac{58}{13} = 4{,}46$

Aplicando este resultado ao *"Principio de Kruskal"*, onde $x = \frac{58 \times 4}{13 \times 4} = \frac{58}{13} = 4{,}46$, temos:

$$P(sucesso) = 1 - \left(\frac{4{,}46^2 - 1}{4{,}46^2}\right)^{52} \cong 93{,}2\%$$

Se, em vez de escolher um número inicial aleatoriamente, o mágico escolher um valor inicial de 1, obtém-se:

$$P(sucesso) = 1 - \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^{N-1}$$

que no caso do "*Principio de Kruskal"* daria:

$$P(sucesso) = 1 - \left(\frac{4{,}46 - 1}{4{,}46}\right)\left(\frac{4{,}46^2 - 1}{4{,}46^2}\right)^{52-1} \cong 94{,}4\%$$

Ou seja um valor, também muito aproximado, ao que é mostrado, na secção 2.2.2.3, no gráfico 2, coluna 1.

O que podemos concluir é que quanto mais pequeno é o valor das figuras maior são as probabilidades de sucesso, também como é mostrado no gráfico 2.

2.2.3.4. A Posição de Junção Esperada

Também podemos calcular a posição de junção esperada, ou seja calcular o valor esperado de T. Sob as premissas de uma distribuição geométrica nós demonstrámos que:

$$P[T > N] = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^N$$

Portanto, agora é uma simples questão de calcular a probabilidade mais específica $P[T = k]$:

$$P[T = k] = P[T > k - 1] - P[T > k] = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x^2 - 1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^{k-1}$$

Utilizando o resultado padrão que $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ para $0 \leq q \leq 1$, para calcular a probabilidade de T, tem-se a seguinte resposta simples:

$$E[T] = \sum_{k=1}^{\infty} kP[T = k] = \frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^{k-1} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^{-2} = x^2$$

Estes cálculos mostram que a posição de junção T tem também uma distribuição geométrica com $p = \frac{x^2-1}{x^2}$ e valor médio x^2. Assim, no *"Principio de Kruskal",* nas condições dadas anteriormente, com $x = \frac{70}{13} = 5{,}385$, vemos que a posição de junção esperada é:

$$E[T] = \frac{1}{5{,}385^2}\left(1 - \frac{5{,}385^2 - 1}{5{,}385^2}\right)^{-2} \cong 29$$

Ou seja, em média, o mágico e o espetador juntam os seus percursos na carta posicionada em 29º lugar.

2.2.3.5. A Colocação final da carta

Claramente, a última carta escolhida será uma das últimas 10. Por simulação, ver Lagarias, Rains, & Vanderbei (2009) a percentagem de cartas finais em cada posição será:

Tabela 5 – Percentagem de cartas finais

Posição	Percentagem
52	18,50%
51	17,15%
50	15,66%
49	14,25%
48	1286%
47	7,15%
46	5,79%
45	4,31%
44	2,88%
43	1,43%

Estes valores podem ser calculados, de forma aproximada usando o "*Teorema de Bayes*", tal como se segue.

Seja $\boldsymbol{a}$ o valor da última carta do trajeto. Vamos considerar que estes valores têm distribuição semi-uniforme com probabilidades: $P(a = 5) = \frac{4}{13}$ e todos os restantes valores têm probabilidade de $\frac{1}{13}$.

Seja $\boldsymbol{b}$ ser a posição da última carta, numerando as posições da carta do fim para o princípio, com $b = 1$ sendo a última carta. Assuma-se que $\boldsymbol{b}$ é escolhido uniformemente com probabilidade de $\frac{1}{10}$.

Uma carta será a carta final se o seu valor exceder a sua posição, isto é $a \geq b$. A probabilidade desta condição será:

$$P(a \geq b) = \sum_{K=1}^{10} P(a \geq k)\, P(b = k) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(1 + \frac{12}{13} + \frac{11}{13} + \frac{10}{13} + \frac{9}{13} + \frac{5}{13} + \frac{4}{13} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13}\right) = \frac{7}{13}$$

Através do "*Teorema de Bayes", temos*:

$$P(b = n \backslash a \geq b) = \frac{P(a \geq b \backslash b = n) P(b = n)}{P(a \geq b)}$$

onde:

$$P(a \geq b \backslash b = n) = \sum_{k=n}^{10} P(a = k)$$

dando, então:

$$P(b = 1 \backslash a \geq b) = \frac{1/_{10}}{7/_{13}} = \frac{13}{70} = 18{,}57\%$$

$$P(b = 2 \backslash a \geq b) = \frac{12/_{130}}{7/_{13}} = \frac{12}{70} = 17{,}14\%$$

$$P(b = 3 \backslash a \geq b) = \frac{11/_{130}}{7/_{13}} = \frac{11}{70} = 15{,}71\%$$

$$P(b = 4 \backslash a \geq b) = \frac{10/_{130}}{7/_{13}} = \frac{10}{70} = 14.29\%$$

$$P(b = 5 \backslash a \geq b) = \frac{9/_{130}}{7/_{13}} = \frac{9}{70} = 12{,}86\%$$

$$P(b = 6 \backslash a \geq b) = \frac{5/_{130}}{7/_{13}} = \frac{5}{70} = 7{,}14\%$$

$$P(b = 7 \backslash a \geq b) = \frac{4/_{130}}{7/_{13}} = \frac{4}{70} = 5{,}71\%$$

$$P(b = 8\backslash a \geq b) \ = \ \frac{3/_{130}}{7/_{13}} \ = \ \frac{3}{70} \ = \ 4{,}29\%$$

$$P(b = 9\backslash a \geq b) \ = \ \frac{2/_{130}}{7/_{13}} \ = \ \frac{2}{70} \ = \ 2{,}86\%$$

$$P(b = 10\backslash a \geq b) \ = \ \frac{1/_{130}}{7/_{13}} \ = \ \frac{1}{70} \ = \ 1{,}43\%$$

2.2.3.6. A probabilidade de sucesso com dois baralhos

Consideremos agora um baralho com 104 cartas, ou seja, dois baralhos, onde o valor de carta médio continua a ser de $x = \frac{70\times8}{13\times8} = \frac{70}{13} = 5{,}385$, temos então:

$$P(sucesso) = 1 - \left(\frac{5{,}385^2 - 1}{5{,}385^2}\right)^{104} \cong 0{,}9739 \cong 97{,}4\%$$

Se também, em vez de escolher um número inicial aleatoriamente, o mágico escolher um valor inicial de 1, obtém-se:

$$P(sucesso) = 1 - \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{N-1}$$

que no caso do "*Principio de Kruskal*" daria:

$$P(sucesso) = 1 - \left(\frac{5{,}385 - 1}{5{,}385}\right)\left(\frac{5{,}385^2 - 1}{5{,}385^2}\right)^{104-1} \cong \ 0{,}9781 \cong 97{,}8\%$$

Ou seja, valores muito mais elevados do que com um baralho. Logo podemos concluir que quanto mais cartas temos maior é a probabilidade de sucesso.

2.2.4. Um complemento do "Princípio de Kruskal" de Steve Humble (2010)

Nesta secção, iremos referir uma experiência efetuada por um professor inglês, Steve Humble, que serve para ilustrar a elevada probabilidade de os trajetos do mágico e do voluntário no "Principio de Kruskal" coincidirem na posição final.

Steve tem um vídeo no Youtube chamado " *Dr. Maths Randomness Show*" que foi protagonizado num *pub* irlandês para alguns professores irlandeses de matemática[2].

O vídeo mostra o que eles fazem. Em primeiro lugar, Steve tem um baralho de 52 cartas de um tamanho superior ao normal dispostas aleatoriamente numa tabela no chão, como mostrado na figura 17.

Cada um dos 8 jogadores coloca-se junto às diferentes cartas da primeira fila. O jogador 1 ficou no 9 de paus, o jogador 2 no 6 de copas, e por ai em diante, terminando o jogador 8 no 5 de ouros.

Cada jogador efetuou o seu percurso de acordo com as regras já conhecidas do "Principio de Kruskal", andando da esquerda para a direita, ao longo da primeira fila, da direita para a esquerda, ao longo da segunda fila e sempre assim. Por exemplo, o jogador 1 estava no 9 de paus, logo começava por movimentar-se para direita. Após avançar 7 cartas

[2] Steve Humble ● Alchemist Cafe Dublin 12th Oct. 2010 - YouTube

à direita, o final da fila é alcançado e após descer para a próxima fila, o movimento continua para a esquerda, colocando o jogador na dama de ouros. Às cartas com figuras atribui-se o valor de 1, assim, quando calha numa delas, simplesmente se avança para a próxima carta, neste caso o 9 de ouros. Continuando desta forma, avançando segundo as cartas mandam, a sequência resultante é a seguinte:

$\clubsuit 9,\ \diamondsuit Q,\ \diamondsuit 9,\ \spadesuit 3,\ \heartsuit 4,\ \clubsuit 8,\ \diamondsuit J,\ \clubsuit A,\ \spadesuit 8,\ \clubsuit 6,\ \heartsuit 5$

Se fizesse isto, acabaria no 5 de copas, que o mandaria andar 5 cartas, mas porque só há uma carta de sobra, ficaria apenas por ai.

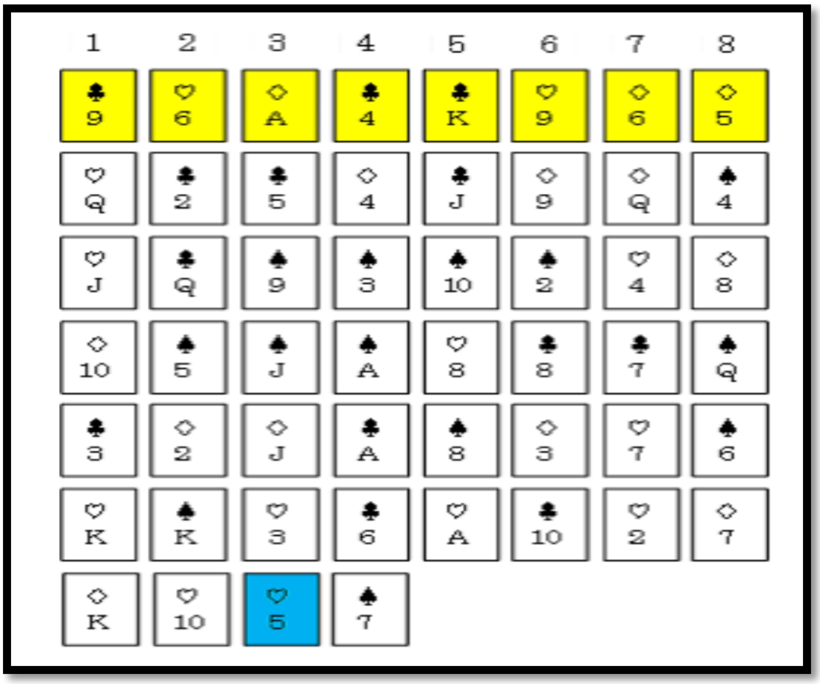

Figura 17 - Todas as oito cartas na linha de cima levam ao mesmo fim.

Steve explicou estas regras aos oito jogadores e cada um deles caminhou por cima das cartas que estavam dispostas no chão (estando os jogadores a caminhar primeiro e a trabalhar na ordem inversa torna-se mais fácil). Se os oito jogadores, que estão em cima da primeira fila de cartas, como mostra a figura 18, se moverem de acordo com estas regras, era assim que iriam proceder:

Player 1	♣9, ◇Q, ◇9, ♠3, ♡4, ♣8, ◇J, ♣A, ♠8, ♣6, ♡5
Player 2	♡6, ◇5, ◇4, ♡J, ♣Q, ♠9, ♡8, ♣A, ♠8, ♣6, ♡5
Player 3	◇A, ♣4, ◇5, ◇4, ♡J, ♣Q, ♠9, ♡8, ♣A, ♠8, ♣6, ♡5
Player 4	♣4, ◇5, ◇4, ♡J, ♣Q, ♠9, ♡8, ♣A, ♠8, ♣6, ♡5
Player 5	♣k, ♡9, ♣2, ♡J, ♣Q, ♠9, ♡8, ♣A, ♠8, ♣6, ♡5
Player 6	♡9, ♣2, ♡J, ♣Q, ♠9, ♡8, ♣A, ♠8, ♣6, ♡5
Player 7	◇6, ◇4, ♡J, ♣Q, ♠9, ♡8, ♣A, ♠8, ♣6, ♡5
Player 8	◇5, ◇4, ♡J, ♣Q, ♠9, ♡8, ♣A, ♠8, ♣6, ♡5

Figura 18 – Percurso dos oito jogadores

Apesar de terem começado em diferentes posições, como os jogadores atravessam as 52 cartas, cada pessoa acaba seguindo um percurso semelhante e, no fim, cada um termina no 5 de copas. No vídeo, Steve refere-se a isto como oito desconhecidos que se unem e tornam-se novos amigos. Uma visão engraçada de descrever o “Principio de Kruskal”.

2.3. Os Dados Não Transitivos

Nesta secção apresentamos três conjuntos de dados diferentes: dois de James Grime e um de Brad Efron. São conjuntos de dados muito incomuns, jogados entre dois jogadores e em que um tem sempre vantagem em relação ao outro. Os dados são chamados **não-transitivos**.

2.3.1. Noção de não transitividade

A relação transitiva é a que se estabelece entre três elementos de um mesmo conjunto, de tal forma que se o primeiro tem relação com o segundo e este tem relação com um terceiro, então o primeiro elemento tem relação com o terceiro.

Se tomarmos $\boldsymbol{A}$ um conjunto, e $\boldsymbol{R}$ uma endorrelação de $\boldsymbol{A}$, ou seja, $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ dizemos que $\boldsymbol{R}$ é transitiva se satisfazer a seguinte condição:

$$(\forall a \in \boldsymbol{A})(\forall b \in \boldsymbol{A})(\forall \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A})\ se\ (a,b) \in \boldsymbol{R} \wedge (b,c) \in \boldsymbol{R} \Longrightarrow (a,c) \in \boldsymbol{R}$$

2.3.2. Dados de James Grime (2010)

O nosso jogo com dois jogadores envolve dois dados, escolhidos entre três, mas não são os dados comuns aos quais estamos habituados. Ao invés de disporem os valores de um a seis, cada dado tem apenas dois valores, distribuídos da seguinte maneira:

Tabela 6 – Faces dos Dados de James Grimes

Dado A	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**6**
Dado B	**2**	**2**	**2**	**5**	**5**	**5**
Dado C	**1**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**

Tabela 7 – Probabilidade de sair cada face

	Dado A	**Dado B**	**Dado C**
1			$\frac{1}{6} = 0{,}167$
2		$\frac{3}{6} = 0{,}5$	
3	$\frac{5}{6} = 0{,}833$		
4			$\frac{5}{6} = 0{,}833$
5		$\frac{3}{6} = 0{,}5$	
6	$\frac{1}{6} = 0{,}167$		

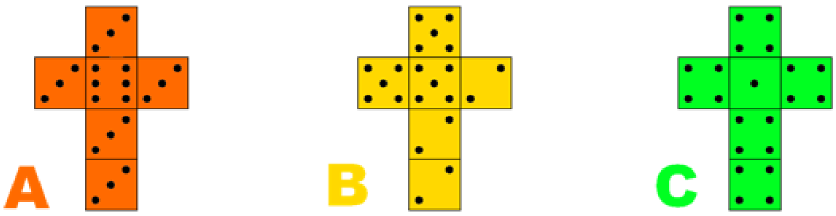

Figura 19 – Dados de James Grimes

O jogo funciona da seguinte maneira: cada jogador escolhe um dado e os dois jogadores lançam os respetivos dados ao mesmo tempo. Quem obter o valor mais elevado, ganha. Parece justo – mas será que é?

Pode ser visto na Figura 20 que nestes lançamentos o dado **A** vai vencer o **B** (o **A** tenderá mais vezes a vencer do que a perder) e que o dado **B** vencerá o **C**. O dado **A** parece ser o mais forte e o dado **C** o mais fraco. Pode esperar-se que, em probabilidades, o dado **A** vença o **C**:

"Se este fosse o caso, chamaríamos ao dado transitivo, pelo que a propriedade vencedora transfere-se através do dado **B** no meio" (James Grime,2010)

Mas não é o caso! De facto, a propriedade vencedora anda à volta num círculo – como se fosse num jogo de "pedra, papel, tesoura" – com o dado **A** a vencer o **B**, o **B** a vencer o **C** e o **C** a vencer o **A**, em probabilidades. Não há um dado forte ou fraco; os dados são chamados **não-transitivos**.

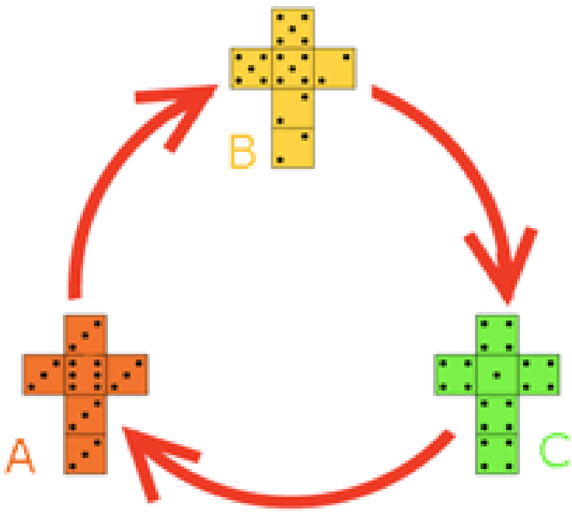

Figura 20 – No lançamento de um dado

2.3.2.1. Uma explicação através das probabilidades

Veremos porque é que o dado **A** vence o **B**, em probabilidade.

Quando se lança o dado **A** há dois resultados possíveis; ou sai um três ou um seis. A probabilidade de sair um três é de $\frac{5}{6}$, enquanto a probabilidade de sair um seis é de $\frac{1}{6}$. Por outro lado, para o dado **B** pode sair um dois ou um cinco, cada um com uma probabilidade de $\frac{1}{2}$. Portanto, no total, se lançarmos o dado **A** e o **B** ao mesmo tempo, teremos quatro resultados possíveis, como está ilustrado no seguinte diagrama de árvore (figura 21):

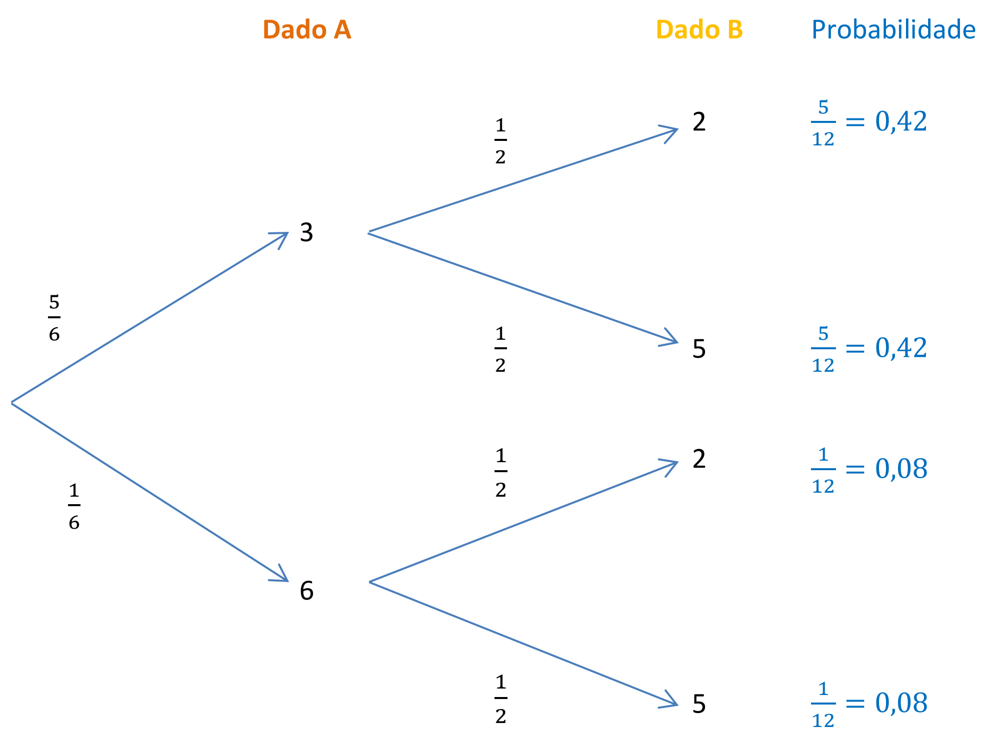

Figura 21 – Probabilidade de A ganhar B =7/12

Obtemos a probabilidade para cada resultado possível multiplicando as probabilidades ao longo do diagrama. Por exemplo, a probabilidade de sair um cinco com o dado **A** e um dois com o **B** é de $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$.

Para calcular a probabilidade de o dado **A** ganhar ao **B**, soma-se as probabilidades de todos os resultados onde o dado **A** vence a **B**. Então, neste caso, a probabilidade de o dado **A** vencer o dado **B,** é dada por:

$$P(A > B) = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} = 0{,}583$$

Ora $\frac{7}{12} = 0{,}583$ é maior que $\frac{1}{2} = 0{,}500$. Então, numa competição de vários jogos é de esperar que o dado **A** vença mais vezes do que o **B**.

Da mesma maneira pode ser mostrado que a longo prazo o dado **B** vence o dado **C**, e depois notavelmente o dado **C** vence o dado **A**. $P(B > C) = \frac{7}{12}$ e $P(C > A) = \frac{25}{36}$ como podemos verificar nos diagramas de árvore da figura 22 e da figura 23.

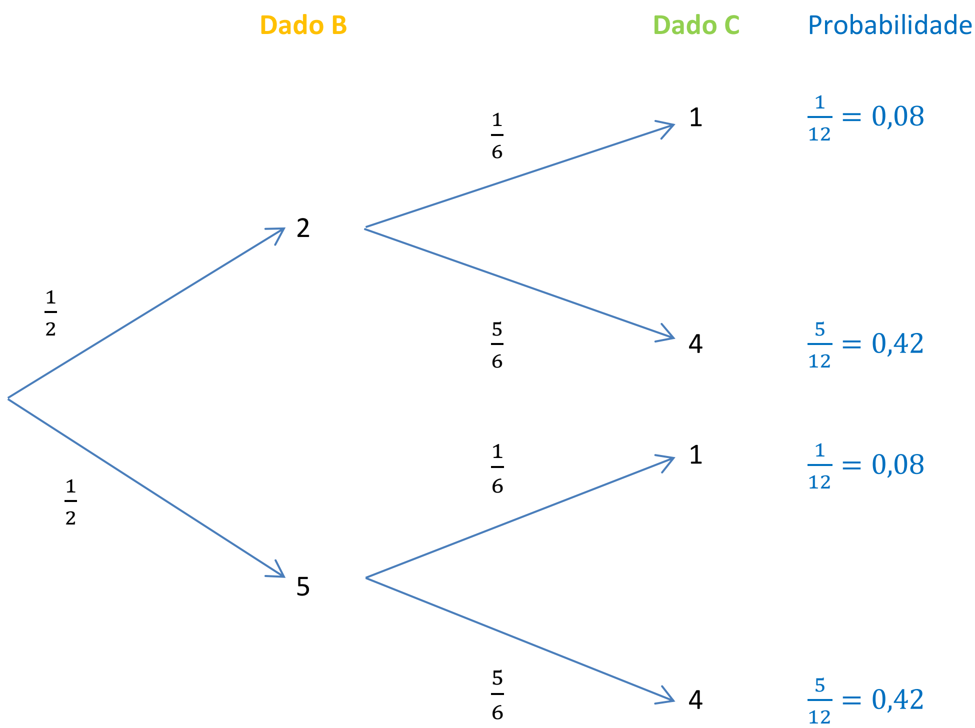

Figura 22 – Probabilidade de B ganhar C =7/12

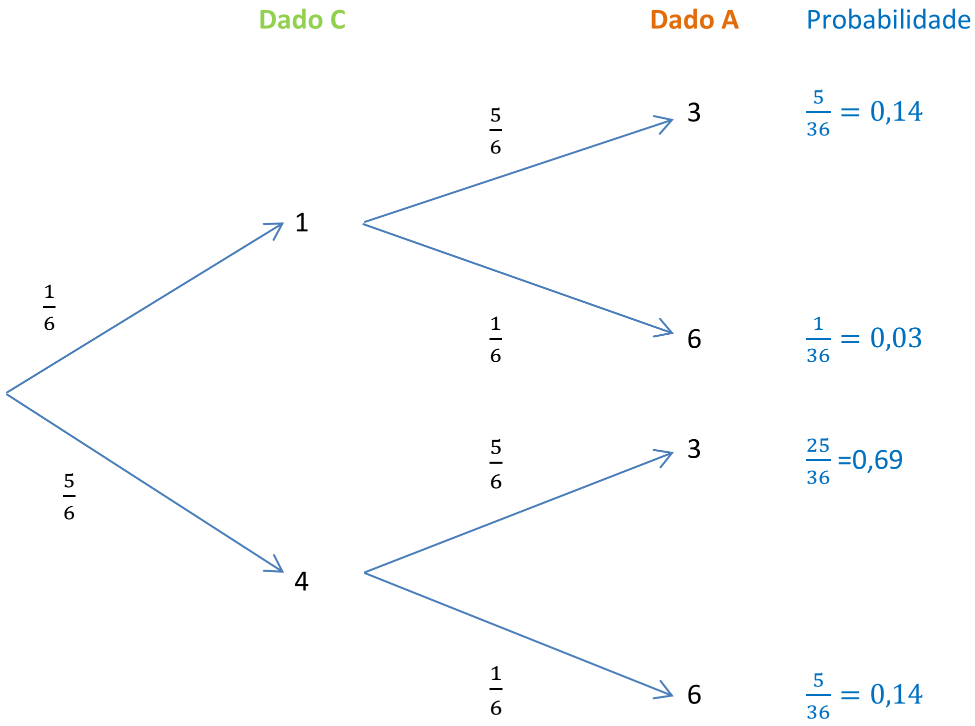

Figura 23 - Probabilidade de C ganhar A =25/36

Portanto, desde que o nosso adversário escolha primeiro, poderemos sempre escolher um dado com uma maior hipótese de vitória. Admitindo que o nosso adversário escolhe cada dado com igual probabilidade, a probabilidade de vitória m é de aproximadamente 62%, como podemos verificar:

$$m = \frac{\frac{7}{12} + \frac{7}{12} + \frac{25}{36}}{3} = \frac{0{,}583 + 0{,}583 + 0{,}694}{3} = \frac{1{,}86}{3} = 0{,}62$$

2.3.2.2. Lançamento de dois dados

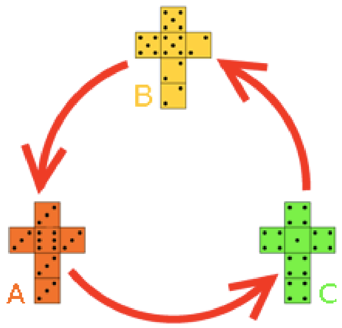

Figura 24 – No lançamento de dois dados

Depois de algumas derrotas, o nosso adversário pode tornar-se desconfiado, então é altura de mostrar o jogo e explicar que está a lidar com **dados não-transitivos**. Podemos dar outra oportunidade ao nosso adversário, oferecendo-lhe a hipótese de escolher o seu dado primeiro, para que possa escolher um dado com uma maior hipótese de vitória. Podemos ainda oferecer uma mudança no jogo: cada um dos jogadores lançará agora duas vezes o seu dado escolhido. Surpreendentemente, com dois dados a ordem da corrente inverte.

A corrente inverte-se para que o círculo de vitória se transforme agora num círculo de derrotas. Agora o dado **A** vence o **C**, o **C** vence o **B** e o **B** vence o **A**, permitindo-lhe que ganhemos o jogo novamente! As probabilidades completas são:

Tabela 8 – Soma das duas faces no lançamento do dado A duas vezes

Dado A	3	3	3	3	3	6
3	6	6	6	6	6	9
3	6	6	6	6	6	9
3	6	6	6	6	6	9
3	6	6	6	6	6	9
3	6	6	6	6	6	9
6	9	9	9	9	9	12

$P(sair\ soma\ 6) = \frac{25}{36}$ $P(sair\ soma\ 9) = \frac{10}{36}$ $P(sair\ soma\ 12) = \frac{1}{36}$

Tabela 9 - Soma das duas faces no lançamento do dado B duas vezes

Dado B	2	2	2	5	5	5
2	4	4	4	7	7	7
2	4	4	4	7	7	7
2	4	4	4	7	7	7
5	7	7	7	10	10	10
5	7	7	7	10	10	10
5	7	7	7	10	10	10

$P(sair\ soma\ 4) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ $P(sair\ soma\ 7) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ $P(sair\ soma\ 10) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Tabela 10 - Soma das duas faces no lançamento do dado C duas vezes

Dado C	1	4	4	4	4	4
1	2	5	5	5	8	8
4	5	8	8	8	8	8
4	5	8	8	8	8	8
4	5	8	8	8	8	8
4	5	8	8	8	8	8
4	5	8	8	8	8	8

$P(sair\ soma\ 2) = \frac{1}{36}$ $P(sair\ soma\ 5) = \frac{10}{36}$ $P(sair\ soma\ 8) = \frac{25}{36}$

Tabela 11 - Probabilidade de sair cada soma

	Dado A	Dado B	Dado C
2			$\frac{1}{36} = 0{,}028$
4		$\frac{9}{36} = 0{,}250$	
5			$\frac{10}{36} = 0{,}278$
6	$\frac{25}{36} = 0{,}694$		
7		$\frac{18}{36} = 0{,}500$	
8			$\frac{25}{36} = 0{,}694$
9	$\frac{10}{36} = 0{,}278$		
10		$\frac{9}{36} = 0{,}250$	
12	$\frac{1}{36} = 0{,}028$		

Logo:

$\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{A} > \boldsymbol{C}) = P(A = 6 \cap C = 2) + P(A = 6 \cap C = 5) + P(A = 9 \cap C = 2) + P(A = 9 \cap C = 5) +$
$P(A = 9 \cap C = 8) + P(A = 12 \cap C = 2) + P(A = 12 \cap C = 5) + P(A = 12 \cap C = 8) =$

$$= \frac{25}{36} \times \frac{1}{36} + \frac{25}{36} \times \frac{10}{36} + \frac{10}{36} \times \frac{1}{36} + \frac{10}{36} \times \frac{10}{36} + \frac{10}{36} \times \frac{25}{36} + \frac{1}{36} \times \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \times \frac{10}{36} + \frac{1}{36} \times \frac{25}{36} =$$

$$= \frac{25}{1296} + \frac{250}{1296} + \frac{10}{1296} + \frac{100}{1296} + \frac{250}{1296} + \frac{1}{1296} + \frac{10}{1296} + \frac{25}{1296} = \frac{671}{1296} = 0{,}518$$

$\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{C} > \boldsymbol{B}) = P(C = 5 \cap B = 4) + P(C = 8 \cap B = 4) + P(C = 8 \cap B = 7) = \frac{10}{36} \times \frac{1}{4} + \frac{25}{36} \times \frac{1}{4} + \frac{25}{36} \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{10}{144} + \frac{25}{72} + \frac{25}{144} = \frac{10}{144} + \frac{50}{144} + \frac{25}{144} = \frac{85}{144} = 0{,}590$$

$\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{B} > \boldsymbol{A}) = P(B = 7 \cap A = 6) + P(B = 10 \cap A = 6) + P(B = 10 \cap A = 9)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{25}{36} + \frac{1}{4} \times \frac{25}{36} + \frac{1}{4} \times \frac{10}{36} = \frac{25}{72} + \frac{25}{144} + \frac{10}{144} = \frac{50}{144} + \frac{25}{144} + \frac{10}{144} = \frac{85}{144} = 0{,}590$$

A média da probabilidade de vitória com dois dados é de aproximadamente 57%, como podemos verificar:

$$m = \frac{\frac{671}{1296} + \frac{85}{144} + \frac{85}{144}}{3} = \frac{0{,}518 + 0{,}590 + 0{,}590}{3} = \frac{1{,}699}{3} = 0{,}566 \approx 0{,}57$$

Apesar da probabilidade de o dado **A** vencer o dado **C** ser maior do que $\frac{1}{2} = 0{,}50$, é uma vitória com "uma margem muito curta". Em sentido curto, digamos menos de 20 lançamentos, o efeito é próximo a 50 – 50, portanto ainda precisaremos de alguma sorte do nosso lado. (Ver anexos 1 e 2)

2.3.3. Quem é Brad Efron

Figura 25 – Bradley Efron

Max H. Stein Bradley Efron, Professor de estatística e bioestatística em Stanford, é um dos maiores estatísticos da atualidade. Tirou o doutoramento de estatística na Universidade de Stanford em 1964 e tem estado na Faculdade desde a sua conclusão. Ao longo dos seus anos em Stanford, ele desempenhou um papel ativo e de liderança como Presidente do Departamento de Estatística, Reitor Adjunto de Ciências, Presidente do Conselho da Universidade e, também, Presidente do Senado da Faculdade.

O Professor Efron é mais conhecido por ser o inventor da técnica de reamostragem "bootstrap", que teve um profundo impacto em, virtualmente, todos as áreas de aplicação estatística. Ele contribuiu com inúmeras contribuições fundamentais para várias áreas da estatística, incluindo o método empírico de Bayes, análise de sobrevivência e inferências em larga escala. Para além de numerosas publicações em revistas, foi o autor de diversos livros importantes, tais como, "The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans", "Large-Scale Inference: Empirical Bayes Methods for Estimation, Testing, and Prediction" e "An Introduction to the Bootstrap".

As suas contribuições inovadoras e fundamentais foram reconhecidas por muitas menções honrosas e prémios. Foi eleito membro da Academia Nacional de Ciências e membro da Academia Americana de Artes e Ciências, IMS e ASA. Foram-lhe atribuídos os títulos de Doutorado honorário em Chicago, Madrid e Oslo. Foi premiado com o Prémio da Associação MacArthur, a Medalha Wilks, o Prémio Parzen, o Prémio C.R. e Bhargarvi Rao, o

Prémio Noether. Também recebeu a Medalha Nacional das Ciências, a menção honrosa mais importante dos Estados Unidos, pelo seu trabalho excecional no campo da estatística.

2.3.4. Dados de Brad Efron

A ideia de dados não-transitivos existe desde o início da década de 70. Contudo, a notável propriedade reversiva não é verdadeira para todos os conjuntos de dados não-transitivos, pelo que é necessário escolher os valores dos dados cuidadosamente. Por exemplo, aqui está outro conjunto famoso de dados não transitivos, proposto pelo famoso estatista americano Brad Efron:

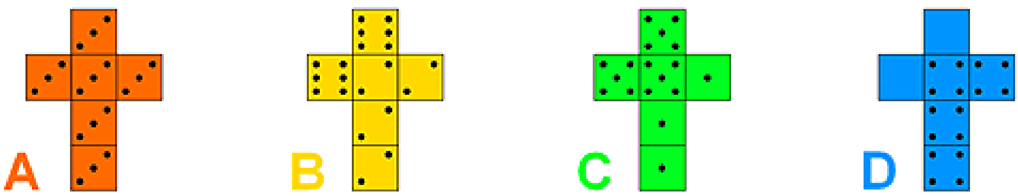

Figura 26 – Dados de Brad Efron

Desta vez os dados usam valores de 0 a 6. Cada dado tem os seguintes valores:

Tabela 12 - Faces dos Dados de Brad Efron

Dado A	3	3	3	3	3	3
Dado B	2	2	2	2	6	6
Dado C	1	1	1	5	5	5
Dado D	0	0	4	4	4	4

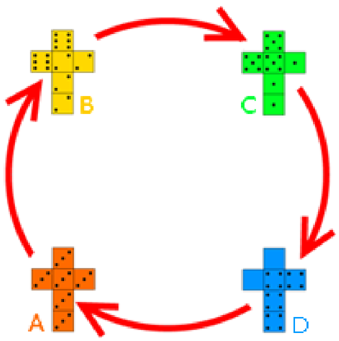

Figura 27 - No lançamento de um dado

Como aconteceu anteriormente, os dados formam um círculo com o dado **A** a vencer o **B**, o **B** a vencer o **C**, o **C** a vencer o **D** e o **D** a vencer o **A**; fazem-no com uma probabilidade de $\frac{2}{3}$, em todos os casos.

Tabela 13 – Probabilidade do dado D vencer o dado A

$D > A$	3	3	3	3	3	3
0						
0						
4	×	×	×	×	×	×
4	×	×	×	×	×	×
4	×	×	×	×	×	×
4	×	×	×	×	×	×

Logo temos: $P(D > A) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Tabela 14 - Probabilidade do dado A vencer o dado B

$A > B$	2	2	2	2	6	6
3	×	×	×	×		
3	×	×	×	×		
3	×	×	×	×		
3	×	×	×	×		
3	×	×	×	×		
3	×	×	×	×		

Logo temos: $P(A > B) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Tabela 15 - Probabilidade do dado B vencer o dado C

$B > C$	1	1	1	5	5	5
2	×	×	×			
2	×	×	×			
2	×	×	×			
2	×	×	×			
6	×	×	×	×	×	×
6	×	×	×	×	×	×

Logo temos: $P(B > C) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Tabela 16 - Probabilidade do dado C vencer o dado D

$C > D$	0	0	4	4	4	4
1	×	×				
1	×	×				
1	×	×				
5	×	×	×	×	×	×
5	×	×	×	×	×	×
5	×	×	×	×	×	×

Logo temos: $P(C > D) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

A probabilidade de vitória m é de aproximadamente 66,7%, como podemos verificar:

$$m = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{4} = \frac{4 \times \frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

Este conjunto de dados não mostra a notável propriedade de inversão quando se fazem dois lançamentos do dado, no entanto tem a vantagem de ter a mesma probabilidade de sucesso, qualquer que seja o par utilizado, sendo essa probabilidade a mais elevada de todos os conjuntos de dados apresentados neste capítulo.

As probabilidades para dois conjuntos de dados de Efron são:

Tabela 17 - Soma das duas faces no lançamento do dado A duas vezes

Dado A	3	3	3	3	3	3
3	6	6	6	6	6	6
3	6	6	6	6	6	6
3	6	6	6	6	6	6
3	6	6	6	6	6	6
3	6	6	6	6	6	6
3	6	6	6	6	6	6

Logo temos: $P(sair\ soma\ 6) = \frac{36}{36} = 1$

Tabela 18 - Soma das duas faces no lançamento do dado B duas vezes

Dado B	2	2	2	2	6	6
2	4	4	4	4	8	8
2	4	4	4	4	8	8
2	4	4	4	4	8	8
2	4	4	4	4	8	8
6	8	8	8	8	12	12
6	8	8	8	8	12	12

Logo temos:

$P(sair\ soma\ 4) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ $\quad$ $P(sair\ soma\ 8) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ $\quad$ $P(sair\ soma\ 12) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Tabela 19 - Soma das duas faces no lançamento do dado C duas vezes

Dado C	1	1	1	5	5	5
1	2	2	2	6	6	6
1	2	2	2	6	6	6
1	2	2	2	6	6	6
5	6	6	6	10	10	10
5	6	6	6	10	10	10
5	6	6	6	10	10	10

Logo temos:

$P(sair\ soma\ 2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(sair\ soma\ 6) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P(sair\ soma\ 10) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Tabela 20- Soma das duas faces no lançamento do dado D duas vezes

Dado D	0	0	4	4	4	4
0	0	0	4	4	4	4
0	0	0	4	4	4	4
4	4	4	8	8	8	8
4	4	4	8	8	8	8
4	4	4	8	8	8	8
4	4	4	8	8	8	8

Logo temos:

$P(sair\ soma\ 0) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ $\quad P(sair\ soma\ 4) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ $\quad P(sair\ soma\ 8) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

Assim, calculando pelo mesmo método anterior temos:

$\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{A} > \ \boldsymbol{D}) = \frac{5}{9} = 0{,}556$ $\quad \boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{B} > \ \boldsymbol{A}) = \frac{5}{9} = 0{,}556$

$\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{B} > \ \boldsymbol{C}) = \frac{5}{9} = 0{,}556$ $\quad \boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{C} > \ \boldsymbol{D}) = \frac{5}{9} = 0{,}556$

$\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{B} = \ \boldsymbol{C}) = 0$ $\quad \boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{C} > \ \boldsymbol{B}) = 1 - 0{,}556 = 0{,}444$

$\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{B} > \ \boldsymbol{D}) = \frac{11}{27} = 0{,}407$ $\quad \boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{D} > \boldsymbol{B})\ = 0$

$\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}) = \frac{16}{27} = 0{,}593$ $\quad \boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{A} > \boldsymbol{C}) = \frac{1}{4} = 0{,}250$

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C} > \boldsymbol{A}) = \frac{1}{4} = 0{,}250$ $\quad \boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{A}\ =\ \boldsymbol{C}) = \frac{1}{2} = 0{,}500$

2.3.5. Outro conjunto de "Dados de James Grime"

James Grime mostra-nos um segundo conjunto de dados onde com este conjunto é possível vencermos a dois adversários ao mesmo tempo.

Aqui temos um conjunto de cinco dados não-transitivos:

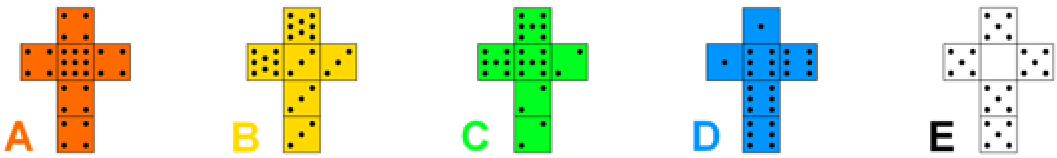

Figura 28 – Conjunto de dados não transitivos de Grime

Estes dados usam valores de 0 a 9, como indicado em baixo:

Tabela 21 - Conjunto de dados de James Grime

Dado A	4	4	4	4	4	9
Dado B	3	3	3	3	8	8
Dado C	2	2	2	7	7	7
Dado D	1	1	6	6	6	6
Dado E	0	5	5	5	5	5

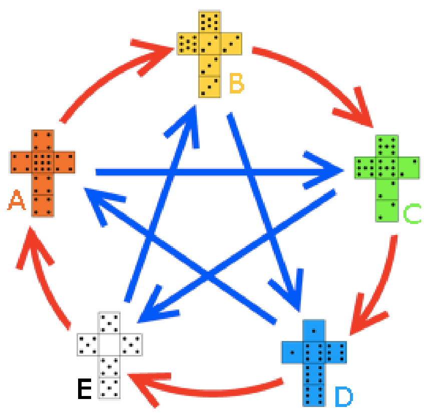

Figura 29 – No lançamento de um dado

Como em outros conjuntos de dados que temos visto, temos uma cadeia: A > B > C > D > E > A.

Contudo, temos ainda uma segunda cadeia: A > C > E > B > D > A. As probabilidades exatas são:

Tabela 22 - Probabilidade do dado A vencer o dado B

$A > B$	3	3	3	3	8	8
4	×	×	×	×		
4	×	×	×	×		
4	×	×	×	×		
4	×	×	×	×		
4	×	×	×	×		
9	×	×	×	×	×	×

$$P(A > B) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} = 0{,}722$$

Tabela 23 - Probabilidade do dado B vencer o dado C

$B > C$	2	2	2	7	7	7
3	×	×	×			
3	×	×	×			
3	×	×	×			
3	×	×	×			
8	×	×	×	×	×	×
8	×	×	×	×	×	×

$$P(B > C) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

Tabela 24 - Probabilidade do dado C vencer o dado D

$C > D$	1	1	6	6	6	6
2	×	×				
2	×	×				
2	×	×				
7	×	×	×	×	×	×
7	×	×	×	×	×	×
7	×	×	×	×	×	×

$$P(C > D) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

Tabela 25 - Probabilidade do dado C vencer o dado D

$D > E$	0	5	5	5	5	5
1	×					
1	×					
6	×	×	×	×	×	×
6	×	×	×	×	×	×
6	×	×	×	×	×	×
6	×	×	×	×	×	×

$$P(D > E) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} = 0{,}722$$

Tabela 26 - Probabilidade do dado E vencer o dado A

$E > A$	4	4	4	4	4	9
0						
5	×	×	×	×	×	
5	×	×	×	×	×	
5	×	×	×	×	×	
5	×	×	×	×	×	
5	×	×	×	×	×	

$$P(E > A) = \frac{25}{36} = 0{,}694$$

Tabela 27 - Probabilidade do dado A vencer o dado C

$A > C$	2	2	2	7	7	7
4	×	×	×			
4	×	×	×			
4	×	×	×			
4	×	×	×			
4	×	×	×			
9	×	×	×	×	×	×

$$P(A > C) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} = 0{,}583$$

Tabela 28 - Probabilidade do dado B vencer o dado D

$B > D$	1	1	6	6	6	6
3	×	×				
3	×	×				
3	×	×				
3	×	×				
8	×	×	×	×	×	×
8	×	×	×	×	×	×

$$P(B > D) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 0{,}556$$

Tabela 29 - Probabilidade do dado C vencer o dado E

$C > E$	0	5	5	5	5	5
2	×					
2	×					
2	×					
7	×	×	×	×	×	×
7	×	×	×	×	×	×
7	×	×	×	×	×	×

$$P(C > E) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} = 0{,}583$$

Tabela 30 - Probabilidade do dado D vencer o dado A

$D > A$	4	4	4	4	4	9
1						
1						
6	×	×	×	×	×	
6	×	×	×	×	×	
6	×	×	×	×	×	
6	×	×	×	×	×	

$$P(D > A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 0{,}556$$

Tabela 31 - Probabilidade do dado E vencer o dado B

$E > B$	3	3	3	3	8	8
0						
5	×	×	×	×		
5	×	×	×	×		
5	×	×	×	×		
5	×	×	×	×		
5	×	×	×	×		

$$P(E > A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 0{,}55$$

A média da probabilidade de vitória para o jogo é de aproximadamente 63%

$$m = \frac{0{,}722+0{,}667+0{,}667+0{,}722+0{,}694+0{,}583+0{,}556+0{,}583+0{,}556+0{,}556}{10} = \frac{6{,}306}{10} = 0{,}6306 \approx 0{,}63$$

As probabilidades exatas e calculando pelo mesmo método anterior são:

$\boldsymbol{P(A > B)} = \frac{7}{12} = 0{,}583$ $\boldsymbol{P(B > C)} = \frac{5}{9} = 0{,}556$

$\boldsymbol{P(C > D)} = \frac{5}{9} = 0{,}556$ $\boldsymbol{P(D > E)} = \frac{7}{12} = 0{,}583$

$\boldsymbol{P(E > A)} = \frac{625}{1296} = 0{,}482$ (uma ligeira derrota, mas a termo curto o efeito é de 50-50),

$\boldsymbol{P(A > D)} = \frac{56}{81} = 0{,}691$ $\boldsymbol{P(B > E)} = \frac{56}{81} = 0{,}691$

$\boldsymbol{P(C > A)} = \frac{85}{144} = 0{,}590$ $\boldsymbol{P(D > B)} = \frac{16}{27} = 0{,}593$

$\boldsymbol{P(E > C)} = \frac{85}{144} = 0{,}590$

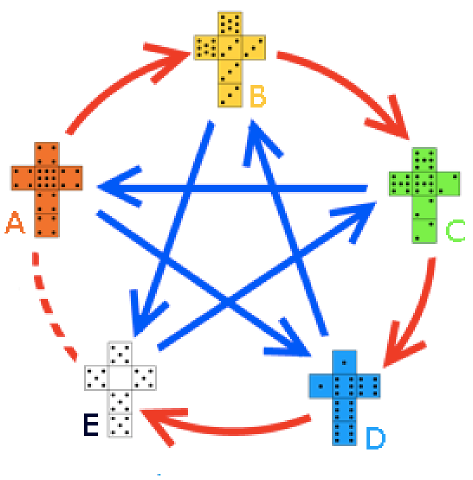

Figura 30 – No lançamento de dois dados

A média da probabilidade de vitória para dois dados é de 59%.

$$m = \frac{0{,}583+0{,}556+0{,}556+0{,}583+0{,}482+0{,}691+0{,}691+0{,}590+0{,}593+0{,}590}{10} = \frac{5{,}915}{10} = 0{,}5915 \approx 0{,}59$$

O que podemos concluir daqui é que podemos jogar o jogo contra dois adversários, ou seja, cada jogador escolhe um dos dados, mas não revelemos as regras do jogo nesta altura. Quando os outros dois jogadores fizerem a sua escolha, podemos agora fazer a nossa, incluindo se nós e os nossos adversários jogarmos a versão de um ou de dois dados do jogo. Como anteriormente jogamos um jogo de 10 lançamentos e, qualquer que seja o dado que os nossos adversários escolherem, haverá sempre um dado com maior hipótese de vencer cada jogador.

Por exemplo, se um adversário escolher o dado **B** e o outro escolher o **C**, nós deveremos escolher o dado **A** e jogar a versão com um dado em jogo. Então, de acordo com o primeiro diagrama (figura 29), nós teremos uma maior hipótese de vencer do que qualquer adversário individual.

Por outro lado, se um adversário escolher o dado **C** e o outro o dado **E**, deveremos escolher o dado **B** e jogar a versão com dois dados em jogo. Então, de acordo com o segundo o diagrama da figura 30, poderemos esperar vencer cada adversário novamente.

Capítulo 3. Paradoxos

"O que é o Homem na natureza? Nada em relação ao infinito, tudo em relação a nada, um meio termo entre nada e tudo"

(Blaise Pascal, em Pensamentos)

3.1. Os Paradoxos e a decisão final

Sob todos os aspetos da vida humana e durante todos os tempos a questão da tomada de decisão sempre esteve presente no dia a dia do ser humano. O ato de decidir esteve associado ao misticismo, à filosofia, à ciência, à engenharia e, devidamente, às matemáticas. A possibilidade de prever o futuro e assim tomar uma decisão acertada sempre foi desejo da ambição humana.

"Logo a vida do ser humano é um jogo, e um jogo não é mais do que uma sequência de decisões. O que torna o jogo mais interessante é o desconhecido e a incerteza das condições que antecedem cada decisão e a variedade da quantidade de informação que se tem em cada passo.

Ao tomar-se uma decisão, a melhor estratégia é, em princípio aquela que tem em conta toda a informação possível e formula regras que se aplicam consoante as condições iniciais. Muitas vezes não dispomos de informação suficiente para formular regras informativas, e noutras não conseguimos utilizar corretamente a informação disponível. Por isso a ação de decidir, que já por si é um risco, pode tornar-se num verdadeiro pesadelo.

Consideremos um jogo no qual o jogador escolhe aleatoriamente as suas condições iniciais sendo-lhe seguidamente revelada alguma informação, e finalmente dada a oportunidade de trocar a sua posição no jogo. Trocar ou não trocar? A decisão final?

Esta questão torna-se ainda mais complicada quando as regras de decisão que o jogador constrói contrariam a intuição inicial que ele tem relativamente à questão".

Andreia Hall (1998)

Por vezes deparamo-nos com problemas aparentemente simples, cujo cálculo da respetiva solução contraria por completo a ideia intuitiva que formamos sobre a questão.

Se, por vezes, é a intuição que nos engana completamente, noutras são os cálculos que partem de pressupostos errados ou de contextos distintos dos que acolhem o raciocínio intuitivo.

Os “Paradoxos” que se seguem ilustram este tipo de situação e mostram que, por vezes, todo o cuidado é pouco na resolução de problemas de probabilidades.

3.2. Paradoxo dos dois envelopes

Figura 31 - Um dos envelopes contém o dobro do dinheiro do outro

3.2.1. O Problema

Falk (2008) descreve um problema designado ”Two Envelopes Problem” que pode ser enquadrado num concurso de televisão, em que o apresentador oferece ao concorrente dois envelopes com dinheiro. A quantia que está num envelope é o dobro da quantia que está no outro envelope. O jogador deverá escolher um dos envelopes. Represente-se por y a quantia do envelope escolhido pelo concorrente. Se ele escolhe o envelope com menos dinheiro (a probabilidade de isso acontecer é de $\frac{1}{2}$), então o outro envelope contém a quantia de $2y$; por outro lado, se ele escolheu o envelope com mais dinheiro (a probabilidade de isso acontecer é de $\frac{1}{2}$), então o outro envelope contém a quantia de $\frac{y}{2}$. É dada a possibilidade de trocar de envelope. Parece ser vantajoso fazer a troca pois o ganho esperado em trocar é $\frac{2y+\frac{y}{2}}{2}=\frac{5}{4}y$

Só que o jogador vai querer trocar de novo e de novo indefinidamente, daí o paradoxo!

O que está errado na forma de pensar descrita anteriormente? Como é que se pode descrever a situação corretamente?

Seja x a quantia que está no envelope com menos dinheiro, de modo que a quantia que está no outro envelope é $2x$. O concorrente escolhe um dos envelopes aleatoriamente (de forma equiprovável). Se o concorrente ficar com a quantia que está no envelope escolhido, o seu ganho esperado é:

$$\frac{x + 2x}{2} = \frac{3}{2}x$$

Se é oferecido a esse concorrente a opção de trocar de envelope, o que deve ele fazer? Na estratégia em que ele fica com o primeiro envelope, ou seja não troca, o seu ganho esperado é de $\frac{3}{2}x$ e na estratégia em que troca o envelope, o seu ganho esperado é também de $\frac{3}{2}x$. Assim, não há diferença (no que diz respeito o ganho esperado) entre trocar ou não trocar.

O que é que estava errado na primeira formulação do problema? É que se está a atribuir a mesma letra y para designar quantias distintas.

No entanto, como refere Falk (2008), numa reformulação das condições iniciais do jogo, temos uma situação onde de facto, se explica a seguir, que se se fizer a troca tem-se um ganho esperado maior do que aquele que se obtém se não se fizer a troca.

Consideremos esse outro jogo: Suponhamos que um jogador está da posse de um envelope com uma quantia de y. Em seguida, atira-se uma moeda ao ar para decidir se um segundo envelope em frente a ele tem a quantia $2y$ ou a quantia de $\frac{y}{2}$. Se o jogador que tem o envelope com a quantia y opta por trocar o seu envelope pelo outro envelope (com quantia desconhecida), qual será o seu ganho esperado? O ganho esperado da quantia do outro envelope é: $\frac{2y+\frac{y}{2}}{2} = \frac{5}{4}y$ de modo que o ganho esperado ao trocar, $\frac{5}{4}y$, é superior ao ganho esperado se não trocar, y, é pois $\frac{5}{4}y - y = \frac{1}{4}y > 0$. Mas repare-se se se pensar em trocar de novo, não faz sentido raciocinar da mesma forma, porque não estaremos nas mesmas condições. Temos nas mãos $\frac{5}{4}y$, em média, e não vale a pena trocar para ficarmos com y.

Seguidamente, iremos apresentar uma forma mais detalhada de calcular o ganho esperado no primeiro jogo, baseado em Hall (1998).

3.2.2. Recorrendo ao cálculo das Probabilidades

Voltemos ao concurso descrito anteriormente onde, duas quantias de dinheiro, no valor de m e $2m$ euros são colocadas em dois envelopes dos quais o concorrente escolhe um. É-lhe dada a oportunidade de trocar de envelope. Como já dissemos não existe vantagem em trocar ou em não trocar.

Numa perspetiva frequencista (tradicional) o problema pode ser visto da seguinte forma: o espaço de probabilidades do par (X,Y) em que X representa a quantia no envelope do concorrente é $\{(x,y):(m,2m),(2m,m)\}$ em que os dois pontos são equiprováveis. O erro surge ao considerar a probabilidade condicionada:

$$P\{Y = y|X = x\} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{x}{2} \; ou \; y = 2x$$

$$= 0, \quad caso \; contrário$$

que teria de ser correta para todo o valor de x . Mas, de facto, esta probabilidade não é correta seja qual for o valor de x.

A probabilidade correta deve ter em conta o valor de X,ou seja:

$$Se\ X = m \Longrightarrow P\{Y = y|X = x\} = 1, \quad y = 2x$$

$$= 0, \quad caso\ contrário$$

$$Se\ X = 2m \ \Longrightarrow \ P\{Y = y|X = x\} = 1, \quad y = \frac{x}{2}$$

$$= 0, \quad caso\ contrário$$

Nestas condições a esperança condicionada é:

$$E[Y|X = x] = 2xI_{[X=m]} + \frac{x}{2}I_{[X=2m]}$$

em que $I_{[.]}$ representa a função indicatriz do acontecimento em índice. Para calcular $E_Y[Y]$ podemos utilizar a seguinte propriedade das esperanças condicionadas:

$$E_Y[Y] = E_X\left[E_{Y|X}[Y|X = x]\right]$$

Verificação:

$$E_X\left[E_{Y|X}[Y|X = x]\right] = \sum_x E_{Y|X}[Y|X = x]P\{X = x\}$$

$$= \sum_x \left(\sum_y yP\{Y = y|X = x\}\right)P\{X = x\} =$$

$$= \sum_x \left(\sum_y yP\{Y = y, X = x\}/P\{X = x\}\right)P\{X = x\} =$$

$$= \sum_y y \sum_x P\{Y = y, X = x\} = \sum_y y\, P\{Y = y\} = E_Y[Y]$$

Voltando aos envelopes temos:

$$
\begin{aligned}
E_Y[Y] &= E_X\left[E_{Y|X}[Y|X=x]\right] \\
&= E_X[Y|X=m]P\{X=m\} + E[Y|X=2m]P\{X=2m\} \\
&= 2m\frac{1}{2} + \frac{2m}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3m}{2}
\end{aligned}
$$

Este valor é também o que se obtém para o ganho esperado se não trocar de envelope, e está de acordo com a nossa intuição. Repare-se que este valor depende de m e não de x.

3.3. Paradoxo das portas de Monty Hall

3.3.1. Quem é Monty Hall

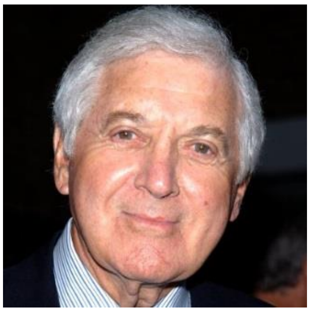

Figura 32 – Monty Hall

Monty Hall é um apresentador e produtor. Nasceu com o nome de Monty Halperin, em 25 de agosto, 1924, em Winnipeg, no Canadá. Era filho de um talhante e emigrou para os Estados Unidos em 1955, onde começou a trabalhar na radio e na televisão da NBC. Em 1963, Hall começou o seu trabalho como apresentador de "Let's make a deal"(Vamos fazer um acordo) um concurso televisivo que foi uma cocriação dele e que foi para o ar nos três maiores canais de televisão Norte-Americana em horários diferentes, durante os 23 anos seguintes. O espetáculo, que colocava aos concorrentes a questão " Levas a caixa ou tentas o que está atrás da cortina?" e lhes pedia que olhassem para trás "Da porta nº 1, porta nº2 ou porta nº3", era um dos programas mais famosos da televisão. Com o seu enorme sucesso, de "Let's make a deal" surgiu um problema matemático chamado "paradoxo das três portas" ou "**problema de Monty Hall"**, já que os matemáticos usavam o espetáculo para ilustrar uma conclusão, aparentemente intuitiva, acerca de probabilidades.

O sucesso de "Let's make a deal" transformou o filho de um talhante numa pessoa famosa, um produtor televisivo e artista. Hall continuou a fazer várias aparições como apresentador até 1991, altura em que se retirou das funções de apresentação. Entretanto, Hall concentra os seus esforços para angariar fundos e só em 1996 angariou 700 milhões, para causas que variam entre ”Variety Clubs International” e “Muscular Dystrophy Association”.

3.3.2. O Programa

A história começou em meados dos anos 70 como já referido concurso televisivo americano “Lets Make a Deal” que tinha aproximadamente a estrutura do concurso Português 1-2-3 muito conhecido entre nós nos anos 80. O seu apresentador não oferecia propriamente cabras, mas prémios de consolação.

3.3.3. O Problema

Buescu (2007) descreve que o problema surgiu quando Marylin Von Savant, famosa colunista americana com um dos mais altos QI’s do século XX, escreveu na sua coluna *Ask Marylin*, da revista “*Parade*”, a seguinte pergunta:

“Suponha que um convidado está num programa de televisão e deve escolher entre três portas, uma das quais esconde um automóvel e as outras duas, um bode cada uma. O convidado escolhe uma das portas. Em seguida, o apresentador, que sabe o que as portas escondem, escolhe uma das duas restantes mostrando um bode. Ele então pergunta ao convidado “Quer trocar de porta?” O problema é: Será vantajoso para o convidado fazê-lo? Se o fizer, qual a sua probabilidade de ganhar o automóvel?”

(Marylin Vos Savant, revista “*Parade”*)

Explicando melhor, um concorrente está a participar de um programa de televisão e é-lhe fornecida a possibilidade de escolher entre 3 portas.

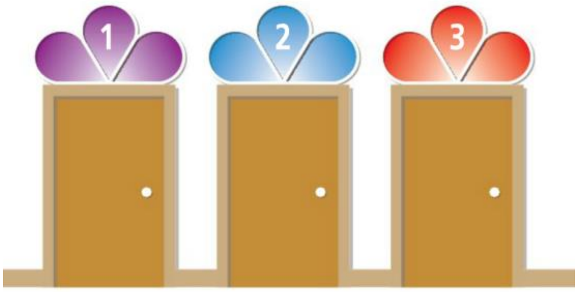

Figura 33 - Escolher uma porta entre as três

Atrás de uma das portas existe um carro e atrás das demais não existe prémio algum. O participante escolhe uma porta, digamos a porta 1 e o apresentador abre outra porta, digamos a porta 3, revelando que não há nada atrás dela. É então oferecido ao participante a oportunidade de trocar de porta. O que é mais vantajoso, trocar ou não a porta escolhida?

3.3.4. A Resposta Intuitiva

Marilyn afirmou na sua coluna que a melhor opção seria trocarmos de porta. Ela recebeu cerca de 10 mil cartas de leitores sobre o assunto, sendo que aproximadamente 92% delas discordavam da sua opinião, uma delas dum matemático da Universidade George Mason University, Robert Sachs, que escreveu:

"Deixe-me explicar: se mostramos que uma das portas não contém o prêmio, essa informação altera a probabilidade das duas escolhas recentes para $\frac{1}{2}$ *e nenhuma das duas portas apresenta motivos para ter maior probabilidade que a outra. Como matemático profissional, estou muito preocupado com a falta do conhecimento do público matemático em geral. Por favor, ajude a melhorar essa situação confessando seu erro e sendo mais cuidadosa no futuro".*

(Matemático Robert Sachs)

O matemático *Paul Erdös*, famoso pelo número de *Erdös* e também pela frase "*Um matemático é uma máquina para transformar café em teoremas*", foi mais um a ficar irritado com a resposta de Marylin e mais irritado ainda ao receber de outro matemático uma demonstração formal de que Marylin estava certa.

Este passou então a ser um problema clássico, conhecido como as "**Portas de Monty Hall"** ou o "**Paradoxo de Monty Hall"**. A resposta intuitiva ao problema, porém errada, é a de que quando o apresentador revelou uma porta não premiada, o concorrente teria à frente um novo dilema com apenas duas portas e um prémio, portanto as probabilidades de que o prémio esteja em qualquer uma das duas portas seriam de 50%. O apresentador ter-nos-ia ajudado, já que as nossas hipóteses subiram de $\frac{1}{3}$ para $\frac{1}{2}$, mas realmente não faria diferença trocar ou não de porta uma vez que ambas teriam as mesmas probabilidades de possuírem o prémio. No entanto, esta resposta está errada, pois a porta que o apresentador abre depende da porta que o concorrente escolher inicialmente.

3.3.5. A resolução do problema

Na verdade, é mais vantajoso trocar de porta e, ao fazê-lo a probabilidade do participante ganhar o carro passa a ser de $\frac{2}{3}$. Resolveremos este problema de duas formas diferentes. A primeira a partir da descrição do problema e a segunda, utilizando probabilidades condicionada, **Teorema de Bayes**.

3.3.5.1. Por descrição do problema

Primeiramente, consideremos duas estratégias para o participante do programa: a estratégia 1, onde o participante seleciona uma porta e é-lhe fornecida a oportunidade de trocar de porta o que ele recusa e a estratégia 2, na qual o participante sempre troca a porta escolhida. Desta forma, utilizando a estratégia 1, o participante ganhará o carro com probabilidade $\frac{1}{3}$, já que $\frac{1}{3}$ das vezes a porta que ele escolhe terá o carro como prêmio. Utilizando a estratégia 2, o participante ganhará o carro se e somente se, a princípio escolhe uma porta que não contém o carro como prêmio, o que ocorre em $\frac{2}{3}$ das vezes, ou seja, a probabilidade de ganhar com a estratégia 2 é de $\frac{2}{3}$.

Esta resolução, apesar de extremamente simples , não é a resolução a que a maioria dos matemáticos recorre, quando tenta resolver este problema.

3.3.5.2. Recorrendo ao cálculo das Probabilidades

Podemos então resolver este problema utilizando os conceitos de probabilidade condicionada. Para isto, consideramos vários passos, o carro é colocado atrás de uma porta, o participante escolhe uma porta e, finalmente o apresentador abre uma porta. É natural analisar o problema através de um diagrama de árvore. Para a sua construção assumimos que se o apresentador pode escolher entre as portas (ou seja, o participante escolheu a porta com o carro), então ele escolhe cada porta com probabilidade $\frac{1}{3}$. A árvore resultante é mostrada na figura 34:

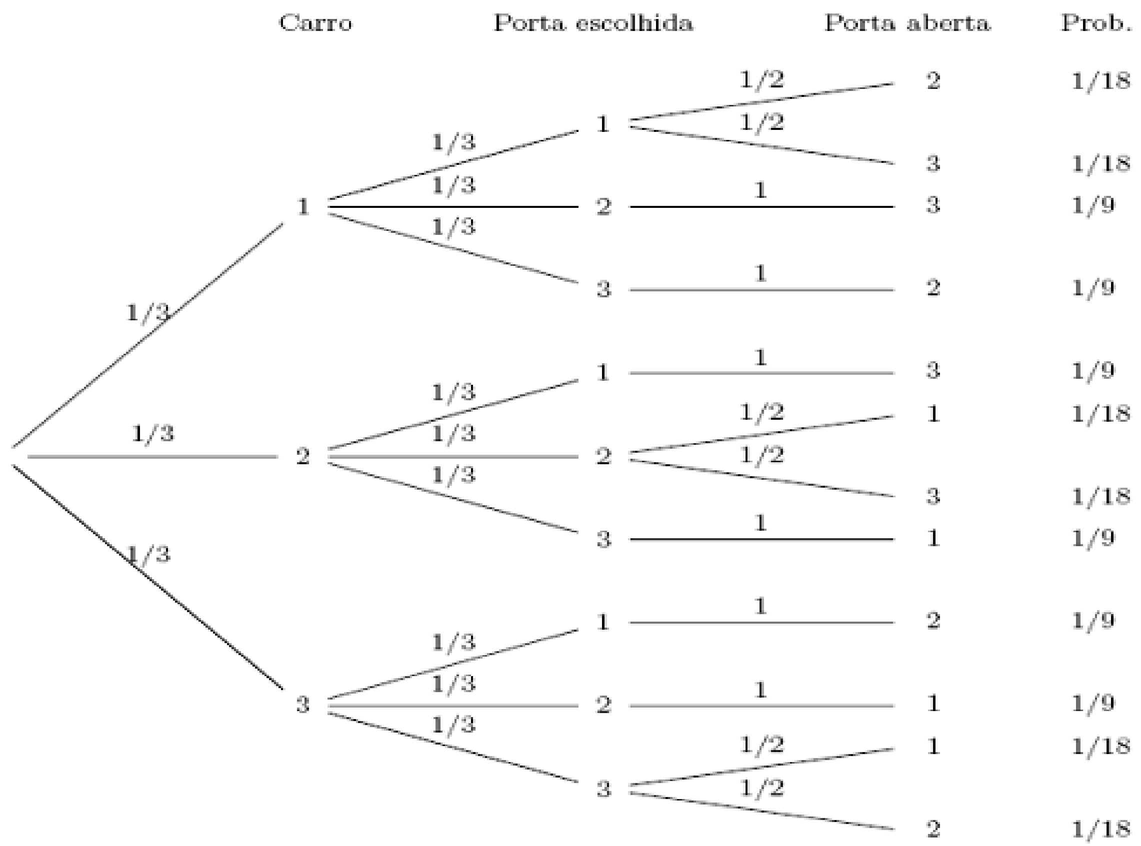

Figura 34 – Problema de Monty Hall

Agora, supondo, por exemplo, que o participante tenha escolhido a porta 1 e o apresentador a porta 3, então existem apenas dois caminhos possíveis através da árvore. Para um dos caminhos, o carro está atrás da porta 1 e para o outro, está atrás da porta 2. O caminho com o carro atrás da porta 2 é duas vezes mais provável que o caminho com o carro atrás da porta 1. Assim, a probabilidade condicionada às escolhas referidas do carro estar atrás da porta 2 é $\frac{2}{3}$ e a probabilidade condicionada a essas mesmas escolhas do carro estar atrás da porta 1 é $\frac{1}{3}$, ou seja, se o participante trocar de porta, ele tem $\frac{2}{3}$ de probabilidades de ganhar o carro. Dada a simetria do problema, qualquer outro par de escolhas feitas pelo participante e apresentador conduz ao mesmo resultado. Ou seja, é preferível trocar a opção, passando de $\frac{1}{3}$ para $\frac{2}{3}$ a probabilidade de ganhar o carro.

Uma outra forma de abordar o problema consiste em enumerar todas as possibilidades quando o participante escolhe a porta 1; na forma de tabela:

Tabela 32 – Resultados possíveis quando o participante escolhe a porta 1

Caso	Prob.	Atrás da porta 1	Atrás da porta 2	Atrás da porta 3	Resultado se ficar na porta que escolheu	Resultado se mudar de porta
1	1/3	**Carro**	Cabra	Cabra	**Carro**	Cabra
2	1/3	Cabra	**Carro**	Cabra	Cabra	**Carro**
3	1/3	Cabra	Cabra	**Carro**	Cabra	**Carro**

De seguida, na tabela 33, expande-se a primeira linha de acordo com o comportamento do apresentador, pois se ele tem uma escolha temos que subdividir o caso 1 em subclasses 1a e 2a para que os acontecimentos sejam equiprováveis.

Tabela 33 - Resultados possíveis quando o participante escolhe a porta 1 (versão 2)

Caso	Prob.	Atrás da porta 1	Atrás da porta 2	Atrás da porta 3	Abriu a porta	Resultado se ficar na porta que escolheu	Resultado se mudar de porta
1a	1/6	**Carro**	Cabra	Cabra	2	**Carro**	Cabra
1b	1/6	**Carro**	Cabra	Cabra	**3**	**Carro**	Cabra
2	1/3	Cabra	**Carro**	Cabra	**3**	Cabra	**Carro**
3	1/3	Cabra	Cabra	**Carro**	2	Cabra	**Carro**

Finalmente expande-se também as restantes linhas com dois casos iguais e equiprováveis para se aplicar a Lei de Laplace diretamente.

Tabela 34 – Todos os resultados possíveis

Caso	Prob.	Atrás da porta 1	Atrás da porta 2	Atrás da porta 3	Abriu a porta	Resultar se ficar na porta que escolheu	Resultado se mudar de porta
1a	1/6	**Carro**	Cabra	Cabra	2	**Carro**	Cabra
1b	1/6	**Carro**	Cabra	Cabra	**3**	**Carro**	Cabra
2a	1/6	Cabra	**Carro**	Cabra	3	Cabra	**Carro**
2b	1/6	Cabra	**Carro**	Cabra	**3**	Cabra	**Carro**
3a	1/6	Cabra	Cabra	**Carro**	2	Cabra	**Carro**
3b	1/6	Cabra	Cabra	**Carro**	2	Cabra	**Carro**

A partir desta tabela 34 vemos bem que a probabilidade de ganhar o carro é $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ se trocar e $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ se não trocar. Mais uma vez, dada a simetria do problema se considerarmos outras escolhas iniciais do participante chegamos aos mesmos valores de probabilidade.

Olhemos agora para o problema duma forma diferente. Consideremos os seguintes acontecimentos e novamente tomemos a porta 1 como sendo a escolha inicial do participante:

$A_1 = "Carro\ está\ na\ porta\ 1"$,

$A_2 = "Carro\ está\ na\ porta\ 2"$,

$A_3 = "Carro\ está\ na\ porta\ 3"$,

$C = "O\ apresentador\ abre\ a\ porta\ 3"$

Naturalmente, iremos assumir que $P(C|A_1) = \frac{1}{2}$, $P(C|A_2) = 1$ e $P(C|A_3) = 0$

Assim, pelo teorema da probabilidade total, temos:

$$P(C) = P(C|A_1)P(A_1) + P(C|A_2)P(A_2) + P(C|A_3)P(A_3) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Agora, usando o teorema de Bayes, temos:

$$P(A_1|C) = \frac{P(C|A_1)P(A_1)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2|C) = \frac{P(C|A_2)P(A_2)}{P(C)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_3|C) = \frac{P(C|A_3)P(A_3)}{P(C)} = \frac{0 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = 0$$

Podemos concluir, portanto, que escolhendo trocar de porta a probabilidade de ganhar o carro é maior. Note-se que estes cálculos são exatamente os mesmo para todos os pares de escolhas (participante, apresentador), o que conduz novamente ao valor $\frac{2}{3}$ para a probabilidade de ganhar o carro se trocar a escolha inicial.

3.4. Paradoxo dos Cartões

3.4.1. O Problema

Consideremos que existem 3 cartões:

- Um cartão preto de ambos os lados,
- Um cartão branco de ambos os lados e,
- Um cartão misto que é preto de um lado e branco do outro.

Todos os cartões são colocados numa caixa e um é escolhido aleatoriamente e colocado em cima da mesa. O lado que está virado para cima é preto. Qual é a probabilidade de o outro lado ser também preto?

Uma explicação fácil é nomear os lados pretos como $x, y\ e\ z$, onde $x\ e\ y$ estão no mesmo cartão, enquanto z está no cartão "misto", então a probabilidade é dividida nos 3 lados pretos com $\frac{1}{3}$ cada. Por conseguinte, a probabilidade de que escolhamos quer x, quer y é a soma das suas probabilidades, logo $\frac{2}{3}$.

A intuição comum sugere que a probabilidade seria de $\frac{1}{2}$ cada porque há dois cartões com um lado preto que poderiam ser este cartão, ou porque há 3 lados brancos e 3 lados pretos. No entanto, este raciocínio falha pois não explora toda a informação; sabemos que não só o cartão que está em cima da mesa tem pelo menos um lado preto, mas também que da população da qual foi selecionado, apenas 1 de 3 lados pretos estava num cartão "misto".

Outra maneira de pensar acerca disto é o problema não ser sobre a hipótese de que o outro lado seja preto, mas sim sobre a hipótese de se ter tirado o cartão todo preto. Se virarmos um lado preto, que é igual, então é duas vezes mais provável que esse lado pertença ao cartão totalmente preto do que ao "misto".

3.4.2. Como resolver o problema

Podemos também aplicar as probabilidades condicionadas, para resolver o problema. Dado que o lado mostrado é preto, o outro lado é preto se e só se for o cartão preto. Se o cartão preto for tirado, um lado preto é mostrado com a probabilidade de 1. A probabilidade de ver um lado preto, entre os seis lados possíveis é $\frac{1}{2}$, a probabilidade de tirar inicialmente o cartão preto é $\frac{1}{3}$.

Considerem-se os acontecimentos:

$C_p = "Tirar\ o\ cartão\ preto\ dos\ dois\ lados"$

$V_p = "Ver\ um\ lado\ preto"$

$P(C_p) = \frac{1}{3}$

$P(V_p) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Pretende-se calcular$P(C_p|V_p)$.

$$P(C_p|V_p) = \frac{P(V_p|C_p) \times P(C_p)}{P(V_p)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Apesar da solução incorreta dar a perceber que o cartão branco é eliminado, também podemos utilizar essa informação numa solução correta. Considerem-se os mesmos acontecimentos, C_p e V_p , mas agora no Universo condicionado a que não se tira o cartão branco. Modificando o método anterior, dado que o cartão branco não é tirado, a probabilidade de ver um lado preto $P(V_p)$ é de $\frac{3}{4}$, e a probabilidade de tirar um cartão preto $P(C_p)$ é de $\frac{1}{2}$. A probabilidade condicional de ter tirado o cartão preto, dado que um lado preto está visível, é :

$$P(C_p|V_p) = \frac{P(V_p|C_p) \times P(C_p)}{P(V_p)} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

3.4.3. Uma versão para a sala de aula

Se quisermos utilizar este paradoxo em contexto de sala de aula, podemos arranjar vários conjuntos de três cartões como os descritos inicialmente e dividir a turma em grupos, distribuindo um conjunto por cada grupo de alunos. Um dos alunos escolhe aleatoriamente um cartão e mostra apenas uma das faces. Os outros alunos deverão adivinhar se a outra face é da mesma cor. Pergunta-se qual a probabilidade de isso acontecer?

Com os alunos assim distribuídos é fácil fazer uma experiência em que se repete o maior número de vezes possível o jogo e a possibilidade de a partir da frequência relativa do acontecimento de interesse, se obter uma estimativa para a probabilidade desejada. Não são precisas muitas experiências para se conseguir ver que a probabilidade se afasta de $\frac{1}{2}$ e se aproxima de $\frac{2}{3}$.

Embora aparentemente diferente, este problema tem a mesma solução que o dado na secção 3.4.1. Podemos até dar uma resposta mais simples tendo em conta a simetria da situação.

Uma vez que apenas um cartão tem as duas cores e dois têm a mesma cor em ambos os lados, sabemos que a probabilidade de escolher um cartão com os lados da mesma cor é $\frac{2}{3}$. Se a pergunta fosse apenas "Ao retirarmos um cartão ao acaso, qual a probabilidade de os lados serem da mesma cor?" a resposta era óbvia $\frac{2}{3}$. Mas na situação descrita em cima revela-se a cor de um dos lados, preto, e pergunta-se se o outro lado é da mesma cor.

Será que esta informação altera a resposta?

A probabilidade (sem considerar as cores individuais) de que a cor escondida é a mesma do que a visível é claramente $\frac{2}{3}$, já que isto acontece se e só se o cartão escolhido for preto ou branco, o que corresponde a 2 dos 3 cartões. A simetria do problema faz com que a probabilidade é que seja independente da cor escolhida, pelo que a informação sobre que cor é vista, não afeta as hipóteses de que ambos os lados tenham a mesma cor.

Na verdade, podemos ver o problema como uma aposta, não numa cor em particular, mas uma aposta em que os lados combinem. Apostar numa cor em particular, independentemente do lado mostrado, irá sempre ter uma probabilidade de $\frac{1}{2}$. No entanto, apostar que os lados correspondam é $\frac{2}{3}$, porque dois cartões correspondem e um não.

Capítulo 4. Probabilidades e Magia Matemática no ensino

“É natural que os nossos alunos sintam mais prazer quando estão envolvidos em atividades desafiadoras e que permitam a descoberta. Para isso precisam de estímulo, de motivação e provocação”

(Professor Ilydio Pereira de Sá - Brasil)

4.1. Nota Prévia

"A noção de jogo aplicado à educação desenvolveu-se vagarosamente e penetrou, tardiamente, no âmbito escolar, sendo sistematizada com atraso, mas trouxe transformações significativas, fazendo com que a aprendizagem se tornasse divertida."

(Schwartz, 1966),

Este capítulo contém a descrição de uma experiência realizada em contexto de sala de aula, utilizando os "Dados Não Transitivos" de James Grime descritos no Capítulo 2. Esta experiência permitiu, entre outras coisas, obter estimativas para os valores das probabilidades a partir do conceito frequencista descrito no Capítulo 1.

4.2. A Matemática no ensino

Culturalmente, a matemática é vista pelos alunos de forma negativa, difícil, desinteressante, o que pode ser uma visão distorcida do que realmente essa área de ensino apresenta. Devemos procurar alternativas para aumentar a motivação na aprendizagem, desenvolver a autoconfiança e despertar o interesse dos alunos pela disciplina. Ensinar matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas.

4.3. Os jogos no ensino da Matemática

"Ao trabalhar com estas atividades lúdicas o aluno passa de um espetador a um ator ativo no processo de aprendizagem. Desta forma passa a ter a oportunidade de viver a construção do seu saber. Assim, durante um jogo, o aluno torna-se mais seguro e critico, expressa o seu pensamento e as suas emoções, troca ideias com os outros e tira conclusões sem a interferência direta do professor. A competição deve ser saudável, levar à cooperação, valorizando as relações e desenvolvendo, assim, a vertente social."

(Iracema Araújo, 2000)

De acordo com Borin (1996), um dos motivos para a introdução de jogos nas aulas de Matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos dos nossos alunos que temem a Matemática e se sentem incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo que estes alunos falam de Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas face aos seus processos de aprendizagem.

Com a utilização do jogo, podemos diversificar estratégias que estimulam a aprendizagem pela descoberta, a resolução de problemas reais e a interação com o meio que irão contribuir para o desenvolvimento das atividades de ensino/aprendizagem. Este recurso permite-nos um maior envolvimento dos alunos nas atividades letivas, o aumento da motivação, a promoção da aprendizagem cooperativa (com o incremento das interações entre pares) e o reforço do papel do professor como mediador dos processos de aprendizagem.

4.3.1. A aplicação do jogo

"O professor não ensina, mas arranja modos de a própria criança descobrir. Cria situações-problema".

(Frases e Pensamentos de Jean Piaget)

Figura 35 - Dados de James Grimes usados na experiência com os alunos

A aplicação do jogo "Dados não Transitivos" de James Grime foi realizada na sala de aula em 2 tempos de 50 minutos com uma turma de 7º ano, que foi dividida em 3 grupos de 4 alunos. Cada grupo foi dividido em duas equipas para jogar uma contra a outra. Inicialmente, foi feita uma apresentação do jogo e das suas regras e, logo em seguida, os alunos começaram a jogar. Enquanto eles jogavam, observou-se o envolvimento e o comportamento deles diante das diversas situações proporcionadas pelo jogo. Após alguns minutos da atividade, foi feita uma pausa para fazer alguns questionamentos, tais como "Houve algum número que saiu mais vezes? " Por quê esses números saíram mais vezes? ". Através desta e de outras indagações, verificou-se que os alunos relacionaram o jogo com alguns conceitos de probabilidade, como experiência aleatória, acontecimento e espaço amostral. Após isso, eles voltaram a jogar, porém agora munidos dessas informações e da tabela espaço-amostral, que lhes permitiu adotar melhores estratégias nas suas jogadas. À medida que iam jogando registavam os resultados de cada jogo numa tabela própria (ver anexos) para depois poderem calcular as respetivas frequências relativas. Por fim, eles responderam à pergunta que investigava se eles gostaram ou não da atividade desenvolvida.

4.3.2. Os resultados

Os alunos mostraram-se bastante motivados a aprender no ambiente lúdico provocado pelo jogo. Percebeu-se, em determinados momentos, que eles refletiam sobre os resultados das jogadas anteriores em busca de melhores estratégias. Isso gerou discussão entre os membros de cada equipa para decidir qual o dado a ser escolhido. Dessa forma, eles já estavam intuitivamente a trabalhar com o cálculo de probabilidade, o que fez ressaltar o interesse demonstrado por eles em relação ao jogo. Esta aceitação em aprender probabilidade através do jogo ”Dados não Transitivos”, justifica-se pelo facto de ele dar mais liberdade e condições para que o aluno possa trabalhar a experimentação, tão fundamental no ensino e aprendizagem deste conteúdo, que por muitas vezes prende o aluno num ambiente abstrato e desinteressante, baseado somente nas questões do livro.

A partir dos registos efetuados (ver anexos 1 e 2) obtiveram-se os seguintes resultados para as frequências relativas observadas:

<u>**Para um só lançamento:**</u>

1. **Dado Laranja contra Dado Amarelo** (20 jogadas)

$fr(Laranja\ ganha\ ao\ Amarelo) = \frac{11}{20} = 0{,}55;$

$fr(\ Amarelo\ ganha\ ao\ Laranja) = \frac{9}{20} = 0{,}45$

Logo, como se pode verificar: $ODado\ Laranja\ ganhou\ ao\ Dado\ Amarelo$

2. **Dado Laranja contra Dado Verde** (40 jogadas)

$fr(Laranja\ ganha\ ao\ Verde) = \frac{11}{40} = 0{,}275;$

$fr(\ Verde\ ganha\ ao\ Laranja) = \frac{29}{40} = 0{,}725$

Logo, como se pode verificar: $O\ Dado\ Verde\ ganhou\ ao\ Dado\ Laranja$

3. **Dado Amarelo contra Dado Verde** (30 jogadas)

$fr(Amarelo\ ganha\ ao\ Verde) = \frac{16}{30} = 0{,}533;$

$fr(Verde\ ganha\ ao\ amarelo) = \frac{14}{30} = 0{,}467$

Logo, como se pode verificar: $O\ Dado\ Amarelo\ ganhou\ ao\ Dado\ Verde$

Com base no conceito frequencista de probabilidades, podemos utilizar as frequências relativas obtidas anteriormente para calcular, aproximadamente, os valores das probabilidades dos respetivos acontecimentos. Comparando os valores obtidos nesta experiência com os valores exatos calculados na secção 2.3.2, tabela 7, podemos ver que embora haja, obviamente, diferenças entre os valores, os resultados do jogo são concordantes, na medida em que se chegou à mesma cadeia de vencedores da figura 20.

Para dois lançamentos:

1. **Dado Laranja contra Dado Amarelo** (40 jogadas)

$fr(Laranja\ ganha\ ao\ Amarelo) = \frac{14}{40} = 0{,}35;$

$fr(\ Amarelo\ ganha\ ao\ Laranja) = \frac{26}{40} = 0{,}65$

Logo, como se pode verificar: $ODado\ Amarelo\ ganhou\ ao\ Dado\ Laranja$

2. **Dado Laranja contra Dado Verde** (20 jogadas)

$fr(Laranja\ ganha\ ao\ Verde) = \frac{9}{20} = 0{,}45;$

$fr(\ Verde\ ganha\ ao\ Laranja) = \frac{11}{20} = 0{,}55$

Logo, como se pode verificar: $O\ Dado\ Verde\ ganhou\ ao\ Dado\ Laranja$

3. **Dado Amarelo contra Dado Verde** (30 jogadas)

$fr(Amarelo\ ganha\ ao\ Verde\ ) = \frac{11}{30} = 0{,}367;$

$fr(\ Verde\ ganha\ ao\ Amarelo) = \frac{19}{30} = 0{,}633$

Logo, como se pode verificar: $ODado\ Verde\ ganhou\ ao\ Dado\ Amarelo$

<u>Concluindo</u>: O que podemos concluir é que o número de experiências não foi suficiente grande para conseguimos aproximações suficientemente boas, especialmente nos casos em que os valores exatos são mais próximos de $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

4.3.3. Cálculo das probabilidades por simulação

Como complemento à experiência realizada, efetuou-se uma simulação usando o Excel com 20000 lançamentos dos três dados de James Grimes e do dado normal. O objetivo desta experiência foi estimar as probabilidades de ocorrência de cada uma das faces dos dados lançados separadamente para as comparar com as de um dado normal. A tabela 35 e 36 e os gráficos 4 e 5 resumem os resultados obtidos:

Tabela 35 – Tabela de frequências num só lançamento

	Frequência Absoluta				Frequência Relativa			
	dado normal	dado 222555	Dado 333336	Dado 144444	dado normal	dado 222555	Dado 333336	Dado 144444
1	3304	0	0	3295	0,165	0,000	0,000	0,165
2	3384	10055	0	0	0,169	0,503	0,000	0,000
3	3302	0	16609	0	0,165	0,000	0,830	0,000
4	3356	0	0	16705	0,168	0,000	0,000	0,835
5	3298	9945	0	0	0,165	0,497	0,000	0,000
6	3356	0	3391	0	0,168	0,000	0,170	0,000
Total	20000	20000	20000	20000	1	1	1	1

No gráfico 4, obtido a partir da Tabela 35, pode-se analisar a face obtida no dado A quando lançado uma vez, e o mesmo para os dados B e C. No mesmo gráfico pode-se fazer uma comparação de um dado normal com os dados de James Grime.

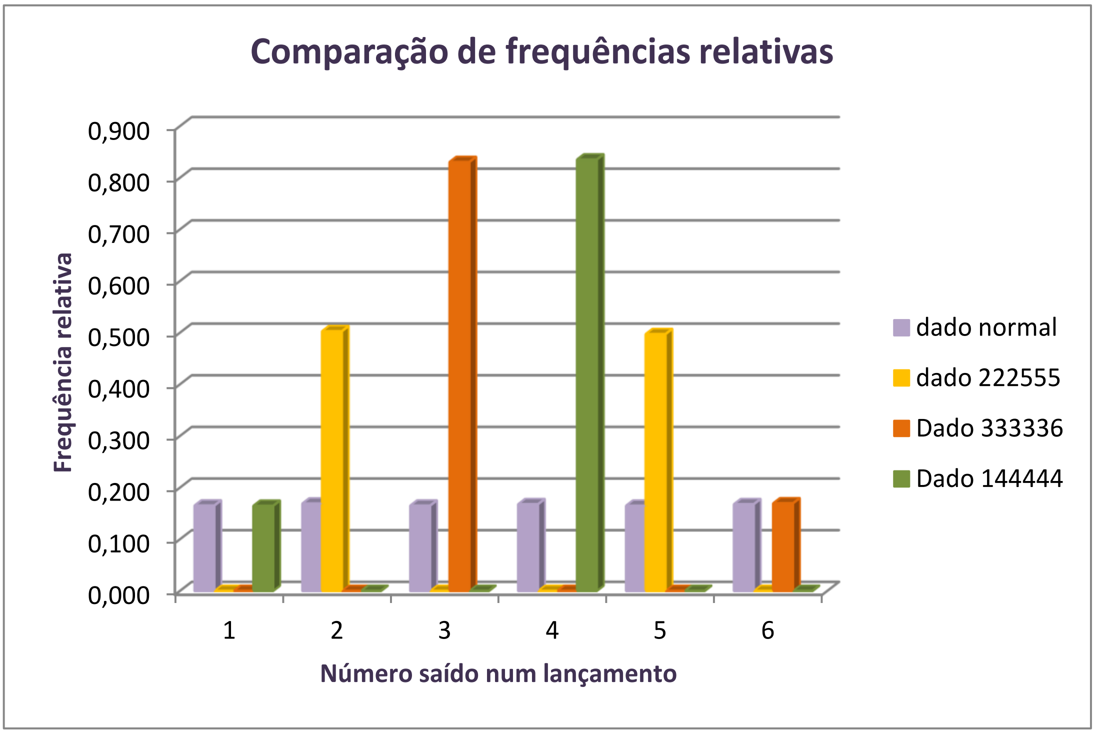

Gráfico 4 – Comparação da frequência relativa num só lançamento

Na tabela 36 e no gráfico 5, pode-se analisar o que ocorre quando se soma a face obtida no dado A após ser lançado duas vezes, e o mesmo para as faces B e C. Mostra-se também a frequência relativa e a frequência absoluta para cada soma possível: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 dum dado normal, para ser possível a comparação.

Tabela 36 - Tabela de frequências para dois lançamentos

	Frequências absolutas				Frequências relativas			
	dado normal	dado 222555	Dado 333336	Dado 144444	dado normal	dado 222555	Dado 333336	Dado 144444
2	588	0	0	524	0,029	0,000	0,000	0,026
3	1127	0	0	0	0,056	0,000	0,000	0,000
4	1709	5120	0	0	0,085	0,256	0,000	0,000
5	2188	0	0	5574	0,109	0,000	0,000	0,279
6	2763	0	13840	0	0,138	0,000	0,692	0,000
7	3287	9776	0	0	0,164	0,489	0,000	0,000
8	2816	0	0	13902	0,141	0,000	0,000	0,695
9	2206	0	5625	0	0,110	0,000	0,281	0,000
10	1651	5104	0	0	0,083	0,255	0,000	0,000
11	1100	0	0	0	0,055	0,000	0,000	0,000
12	565	0	535	0	0,028	0,000	0,027	0,000
Total	20000	20000	20000	20000	1,000	1,000	1,000	1,000

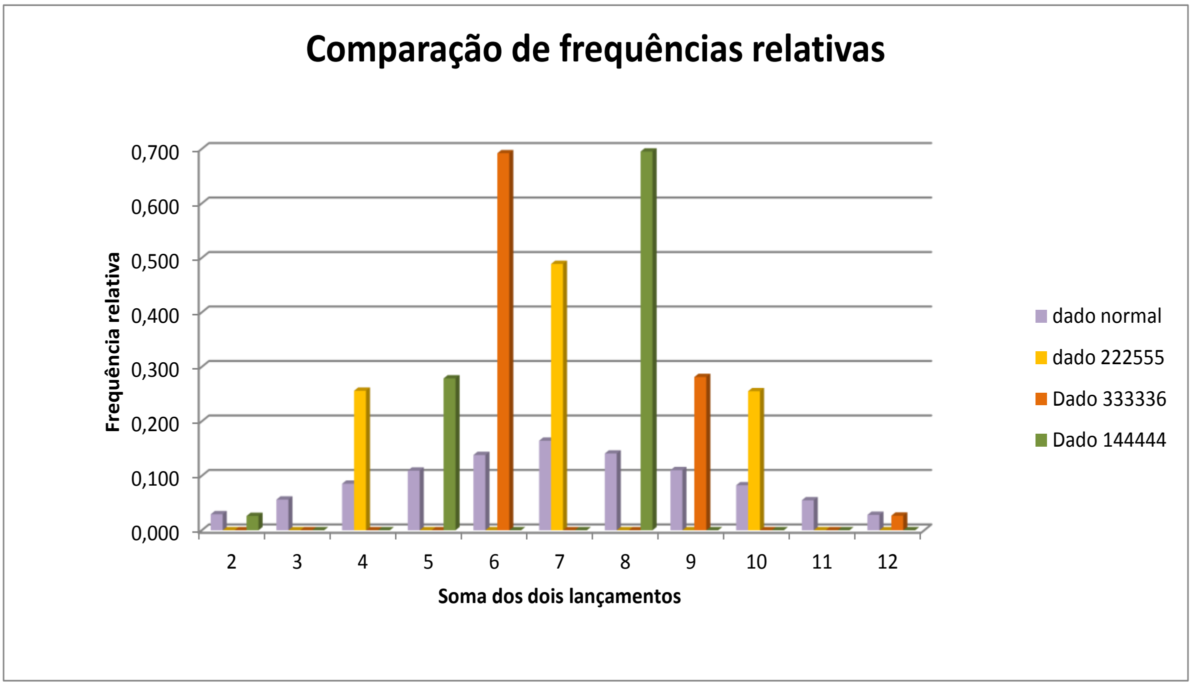

Gráfico 5 - Comparação da frequência relativa para dois lançamentos

Carvalho e Fernandes (2007) referem que são frequentes as situações em que se estende a noção de probabilidade a um modo de mensurar a incerteza, mostrando a necessidade de se desenvolver experiências na escola em que os alunos desenvolvam as noções intuitivas de acaso a partir de situações vivenciadas, pois somente assim, adquirirão um nível mais elaborado do conhecimento probabilístico evitando entendimento e interpretações equivocadas futuramente. Mas os alunos apresentam noções concretas sobre conceitos probabilísticos como acaso, acontecimentos independentes e mutuamente exclusivos provindas, muitas vezes, dos jogos e brincadeiras ajudando-as no desenvolvimento e compreensão na área. Além disso, através do progresso e da instrução formal, desenvolvem intuições iniciais de frequência relativa e probabilidade. Através de experiências realizadas, como a extração com reposição de bolas de sacos e de lançamento de moedas e dados um grande número de vezes foi observado que o aluno interpreta comparativamente a experiência com a noção clássica de probabilidade, favorecendo o entendimento. Porém, tais experiências tornam-se desgastantes conforme cresce o número de repetições.

O ensino, tal como o conceito de probabilidade, vem-se apoiando nos últimos anos em alguns recursos computacionais que facilitam o entendimento e melhoram a qualidade da aprendizagem, além de proporcionarem maior interatividade ao aluno que antes não podia visualizar acontecimentos com tanta facilidade e compreensão.

Neste contexto, a simulação computacional veio solucionar o nosso problema complexo e considerado difícil de se resolver até então, pois além de ser um meio de confrontar teorias com experiências, também é importante como ferramenta de aquisição de conhecimento.

O software aqui apresentado, o Excel, é um programa executável de fácil utilização, que simulou lançamentos simultâneos dos três dados com faces não equiprováveis, os "Dados Não Transitivos" de James Grime, comparativamente com um dado normal, ou seja, com faces equiprováveis.

O principal objetivo da experiência foi mostrar que a frequência relativa pode ser utilizada para "estimar" a probabilidade, tendo neste caso a conceção frequentista de probabilidade.

Assim, podemos lançar os dados 20000 vezes abrindo mão do trabalho manual e observar o que ocorreu quando aumentamos progressivamente o número de lançamentos. O software simula-os e apresentou quantas vezes cada resultado aparece, ou seja, as frequências relativas dos acontecimentos (face do dado A, dado laranja, face do dado B, dado amarelo e face do dado C, dado verde).

No caso especificado, é possível, antes mesmo de estimar através das frequências, determinar as probabilidades dos acontecimentos. Desse modo, pode-se verificar que realmente há uma tendência natural das frequências relativas se aproximarem das probabilidades, tanto num dado normal como nos "Dados Não Transitivos" pois podemos comparar os resulta das experiências com os teóricos, ou seja, associando a realidade com o modelo matemático, apresentado no Capítulo 2. Dado o elevado número de lançamentos podemos ver que os resultados obtidos na simulação (Tabelas 35 e 36) são bastante próximos dos valores exatos (Tabelas 10 e 11).

4.3.4. Uma análise utilizando os intervalos de confiança

Uma maneira de calcularmos uma estimativa de um parâmetro desconhecido é construir um intervalo de confiança para o parâmetro com uma probabilidade de $1-\alpha$ de que esse intervalo contenha o verdadeiro valor do parâmetro. Assim, quando dizemos que temos um intervalo a 95% para um certo parâmetro, quer dizer que apenas 5% das vezes o intervalo não irá conter o verdadeiro valor do parâmetro.

Para a nossa experiência com uma dimensão de amostra $n = 20000$ e pretendendo estimar a probabilidade de sair cada uma das faces do dado, $P(sair\ cada\ face)$, vamos aplicar a expressão de intervalo de confiança para a proporção, a 95%. A estimativa $\hat{p}$ é dada pela frequência relativa do acontecimento em causa.

Então temos o seguinte intervalo de confiança [Longo &Branco(2012)]:

$$\left[\hat{p} - 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ;\ \hat{p} + 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right].$$

4.3.4.1. No lançamento de um dado

Para o Dado Laranja (Dado A)

$$P(sair\ face\ 3) = \frac{5}{6} = 0{,}8333$$

$$P(sair\ face\ 6) = \frac{1}{6} = 0{,}1667$$

Na tabela 35 analisamos que:

$$fr(sair\ face\ 3) = 0{,}8300$$
$$fr(sair\ face\ 6) = 0{,}1700$$

Calculando o intervalo de confiança de 95% temos:

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,3})} = \left[0{,}8300 - \ 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8300(1-0{,}8300)}{20000}};\ 0{,}8300 + \ 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8300(1-0{,}8300)}{20000}}\right] =$$
$$= [0{,}8248; 0{,}8352]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ face\ 3) = \frac{5}{6} = 0{,}8333$, encontra-se neste intervalo.

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,6})} = \left[0{,}1700 - \ 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1700(1-0{,}1700)}{20000}};\ 0{,}1700 + \ 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1700(1-0{,}1700)}{20000}}\right] =$$
$$= [0{,}1648; 0{,}1752]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ face\ 6) = \frac{1}{6} = 0{,}1667$ encontra-se neste intervalo.

Para o Dado Amarelo (Dado B)

$$P(sair\ face\ 2) = P(sair\ face\ 5) = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

Na tabela 35 analisamos que:

$$fr(sair\ face\ 2) = 0{,}5030$$
$$fr(sair\ face\ 5) = 0{,}4970$$

Calculando o intervalo de confiança de 95% temos:

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,2})} = \left[0{,}5030 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5030(1-0{,}5030)}{20000}};\ 0{,}5030 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5030(1-0{,}5030)}{20000}}\right] =$$
$$= [0{,}4961; 0{,}5099]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ face\ 2) = \frac{3}{6} = 0{,}5$ encontra-se neste intervalo.

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,5})} = \left[0{,}4970 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}4970(1-0{,}4970)}{20000}};\ 0{,}4970 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}4970(1-0{,}4970)}{20000}}\right] =$$
$$= [0{,}4901; 0{,}5039]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ face\ 5) = \frac{3}{6} = 0{,}5$ encontra-se neste intervalo.

Para o Dado Verde (Dado C)

$$P(sair\ face\ 1) = \frac{1}{6} = 0{,}1667$$
$$P(sair\ face\ 4) = \frac{5}{6} = 0{,}8333$$

Na tabela 35 analisamos que:

$$fr(sair\ face\ 1) = 0{,}1650$$
$$fr(sair\ face\ 4) = 0{,}8350$$

Calculando o intervalo de confiança de 95% temos:

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,1})} = \left[0{,}1650 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1650(1-0{,}1650)}{20000}};\ 0{,}1650 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1650(1-0{,}1650)}{20000}}\right] =$$
$$= [0{,}1599; 0{,}1701]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ face1) = \frac{1}{6} = 0{,}1667$ encontra-se neste intervalo.

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,4})} = \left[0{,}8350 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8350(1-0{,}8350)}{20000}};\ 0{,}8350 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8350(1-0{,}8350)}{20000}}\right] =$$

$$= [0{,}8299; 0{,}8401]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ face\ 4) = \frac{5}{6} = 0{,}8333$ encontra-se neste intervalo.

<u>Concluindo,</u> todas as estimativas a que chegámos produzem intervalos de confiança que contêm o verdadeiro valor da probabilidade, e com larguras inferiores a $0{,}015$.

4.3.4.2. No lançamento de dois dados

Para o Dado Laranja (Dado A)

$$P(sair\ soma\ 6) = 25/36 = 0{,}694$$

$$P(sair\ soma\ 9) = 10/36 = 0{,}278$$

$$P(sair\ soma\ 12) = 1/36 = 0{,}028$$

Na tabela 36 analisamos que:

$$fr(sair\ soma\ 6) = 0{,}692$$
$$fr(sair\ soma\ 9) = 0{,}281$$
$$fr(sair\ soma\ 12) = 0{,}027$$

Calculando o intervalo de confiança de 95% temos:

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,6})} = \left[0{,}692 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}692(1-0{,}692)}{20000}};\ 0{,}692 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}692(1-0{,}692)}{20000}}\right] =$$

$$= [0{,}686; 0{,}698]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ soma\ 6) = 25/36 = 0{,}694$, encontra-se neste intervalo.

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,9})} = \left[0{,}281 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}281(1-0{,}281)}{20000}};\ 0{,}281 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}281(1-0{,}281)}{20000}}\right] =$$

$$= [0{,}275; 0{,}287]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ soma\ 9) = \frac{10}{36} = 0{,}278$ encontra-se neste intervalo.

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,12})} = \left[0{,}028 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}028(1-0{,}028)}{20000}};\ 0{,}028 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}028(1-0{,}028)}{20000}}\right] =$$

$$= [0{,}026; 0{,}030]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ soma\ 12) = 1/36 = 0{,}028$ encontra-se neste intervalo.

Para o Dado Amarelo (Dado B)

$$P(sair\ soma\ 4) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}250$$

$$P(sair\ soma\ 7) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0{,}500$$

$$P(sair\ soma\ 10) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}250$$

Na tabela 36 analisamos que:

$$fr(sair\ soma\ 4) = 0{,}256$$

$$fr(sair\ soma\ 7) = 0{,}489$$

$$fr(sair\ soma\ 10) = 0{,}255$$

Calculando o intervalo de confiança de 95% temos:

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,4})} = \left[0{,}256 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}256(1-0{,}256)}{20000}};\ 0{,}256 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}256(1-0{,}256)}{20000}}\right] =$$

$$= [0{,}250; 0{,}262]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ soma\ 4) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}250$ encontra-se neste intervalo.

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,7})} = \left[0{,}489 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}489(1-0{,}489)}{20000}};\ 0{,}489 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}489(1-0{,}489)}{20000}}\right] =$$

$$= [0{,}485; 0{,}50]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ soma\ 7) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0{,}500$ encontra-se neste intervalo.

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,10})} = \left[0{,}255 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}255(1-0{,}255)}{20000}};\ 0{,}255 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}255(1-0{,}255)}{20000}}\right] =$$

$$= [0{,}249; 0{,}261]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ soma\ 10) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}250$ encontra-se neste intervalo.

Para o Dado Verde (Dado C)

$$P(sair\ soma\ 2) = \frac{1}{36} = 0{,}028$$

$$P(sair\ soma\ 5) = \frac{10}{36} = 0{,}278$$

$$P(sair\ soma\ 8) = \frac{25}{36} = 0{,}694$$

Na tabela 36 analisamos que:

$$fr(sair\ soma\ 2) = 0{,}026$$
$$fr(sair\ soma\ 5) = 0{,}279$$
$$fr(sair\ soma\ 8) = 0{,}695$$

Calculando o intervalo de confiança de 95% temos:

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,2})} = \left[0{,}026 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}026(1-0{,}026)}{20000}};\ 0{,}026 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}026(1-0{,}026)}{20000}}\right] =$$
$$= [0{,}024; 0{,}028]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ soma\ 2) = \frac{1}{36} = 0{,}028$ encontra-se neste intervalo.

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,5})} = \left[0{,}279 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}279(1-0{,}279)}{20000}};\ 0{,}279 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}279(1-0{,}279)}{20000}}\right] =$$
$$= [0{,}273; 0{,}285]$$

Logo, como se pode verificar $P(sair\ soma\ 5) = \frac{10}{36} = 0{,}278$ encontra-se neste intervalo.

$$\boldsymbol{IC}_{(\mathbf{95\%,8})} = \left[0{,}695 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}695(1-0{,}695)}{20000}};\ 0{,}695 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}695(1-0{,}695)}{20000}}\right] =$$
$$= [0{,}687; 0{,}701]$$

Logo, como se pode verifica $P(sair\ soma\ 8) = \frac{25}{36} = 0{,}694$ encontra-se neste intervalo.

Concluindo, todas as estimativas a que chegámos produzem intervalos de confiança que contêm o verdadeiro valor da probabilidade, e com larguras também inferiores a $0{,}015$.

Conclusões

Na sua obra "*Para onde vai a Educação"* (1978) Jean Piaget questiona-se sobre a eficácia dos métodos da escola tradicional. "*Será que esta consegue desenvolver a criança e o adolescente no sentido de um raciocínio ativo, cada vez mais elaborado e autónomo…?"* São questões como esta que nos impulsionaram para a busca de novas atitudes, de participar em formações que nos permitam introduzir, na sala de aula, práticas inovadoras.

Encontrando-se a Escola virada para o futuro e para o desenvolvimento, torna-se cada vez mais premente imprimir novas metodologias na atividade pedagógica, com vista a estimular as capacidades cognitivas dos nossos alunos e a incutir na criança o gosto pela descoberta e motivação para aprender.

Numa sociedade onde o conhecimento cresce rapidamente, é urgente estarmos preparados para essas mudanças. Considerando a educação como uma condição necessária ao desenvolvimento do ser humano, os recursos/ metodologias proporcionados pela Escola e utilizados pelos professores devem, pois, promover a autonomia intelectual dos alunos, levando-os a aprender por si próprios. Perante esta realidade, sentimos necessidade de atualizar alguns conhecimentos e adquirir novas competências na área das probabilidades, de modo a melhorar o nosso desempenho profissional.

O ensino da Matemática do 3º Ciclo e Secundário deve ser direcionado, de acordo com as Metas Curriculares, para o desenvolvimento de atividades que estimulem os alunos para novos saberes e que contribuam para o desenvolvimento da sua autonomia e responsabilidade, nomeadamente: pesquisar, selecionar e organizar informação; comunicar em diferentes contextos; utilizar suportes diversificados na apresentação dos trabalhos; relacionar conteúdos/conceitos; aplicar os conhecimentos a novas situações; trabalhar em grupo ou individualmente; realizar atividades práticas/laboratoriais. A utilização dos jogos é uma mais-valia para a consecução destas metodologias de ensino.

Os princípios básicos que um mágico não se pode esquecer são: *"não anunciar o efeito* e *não revelar o segredo"*. Um "matemágico", por vezes, irá quebrar estas regras, mas deveremos estar conscientes disso. Claro que estas não são regras universais e, em muitas ocasiões, o fator matemático subjacente a um truque mágico é tão enigmático como o truque propriamente dito.

Apresentámos e analisámos um conjunto de conhecimentos e dilemas da Teoria das Probabilidades. Destacámos algumas analogias nos diferentes problemas, tal como nas suas soluções, revelando alguns segredos. Todos requerem a probabilidade de que os objetos de um determinado par tenham alguma propriedade quando existe informação de que pelo menos um deles a tem. Tudo isto faz referência, de forma implícita ou explícita, à forma como a informação é recolhida, daí a possível dificuldade da resolução dos mesmos.

Demonstrámos que diferentes formas de recolher exatamente a mesma informação podem alterar de forma significativa o contingente da probabilidade, como por exemplo, no paradoxo dos dois envelopes.

Os nossos problemas mostraram porque é que nenhum destes critérios pode servir de caracterização de relevância de forma definitiva. Por vezes, uma amostra pode ser alterada após a introdução de mais informação, por exemplo o Princípio de Kruskal, modificando também as condicionantes, o que leva à alteração da probabilidade. Outras vezes, os possíveis valores alternativos da informação adicional não são realmente complementares ao espaço amostral; assim, a sua simetria não necessita levar à independência.

Esta dissertação pretende oferecer algumas ideias para os professores e alunos do ensino básico e secundário. Pensar de um modo criativo em novas maneiras de resolver problemas é não só a chave para um bom mágico, mas também uma competência fulcral para um bom matemático e uma das aptidões de empregabilidade mais úteis que se podem adquirir por se ser um bom matemático. Como acabamos de ver, muitos matemáticos famosos eram também mágicos. Não é uma coincidência – eles gostavam da sua matemática, assim como gostavam de a usar para entreter.

Bibliografia

- Borin, J. (1996). *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática.* São Paulo: IME-USP.
- Buescu, j. (2007). *O Mistério do Bilhete de Identidade e Outras Histórias.* Lisboa: Gradiva.
- Caeiro, F. (2009). Probabilidade e Estatística. *Faculdade de Ciências e Tecnologia*, pp. 1-6.
- Carvalho, C., & Fernandes, A. J. (2007). Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da Psicologia. *Revista Quadrante, v.14, n.2.*, pp. 71-88.
- Falk, R. (2008). *"The Unrelenting Exchange Paradox". Teaching Statistics 30 (3): 86-88.* Obtido em 4 de Setembro de 2013, de http://en.wikipedia.org/wiki/Two_envelopes_problem#cite_note-4.
- Gardner, C. F. (June de 1975). *The Kruskal Principle, The Pallbearrers Review.* Obtido em 21 de Novembro de 2012, de http://arxiv.org/pdf/math/0110143.pdf.
- Gardner, M. (1993). *"Ah, apanhei-te".* Lisboa: Gradiva-publicações L.da.
- GAVE. (2011). *Probabilidade e Combinatória, Vol 1, Matemática A , 12º ano.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação e Ciência.
- Gnedenko, B. V. (1968.). *"The theory of probability". Traduzido para inglês por B, D.* New York,: Chelsea publishing company.
- Gomes, L., & Raposo, D. (2012). *Matemática A-12º Ano.* Lisboa: Asa.
- Grime, J. (s.d.). *http://plus.maths.org/content/non-transitiv-dice.* Obtido em 29 de Janeiro de 2013
- Grime, J. (s.d.). *http://singingbanana.com/dice/article.htm*. Obtido em 22 de Fevereiro de 2013

- Grime, J. (s.d.). *http://www.youtube.com/watch?v=uRI4XtnJxXo.* Obtido em 21 de Novembro de 2012

- Grime, J. (s.d.). *http://youtube.com/singing banana*. Obtido em 22 de Fevereiro de 2013

- Grinstead, J. L. (2006). *"Grinstead and Snell's Introduction to Probability". The CHANCE Project.* Obtido em 22 de Fevereiro de 2013, de http://math.dartmouth.edu/~prob/prob/prob.pdf.

- Hall, A. (1998). "Trocar ou não trocar? Eis a questão". *Folha informativa da Sociedade Portuguesa de Matemática 9, 17-20*.

- *http://wizardofodds.com/games/chuck-a-luck/ .* (s.d.). Obtido em 27 de Janeiro de 2013, de http://casinochance.com/help/chuck.html.

- *http://www.dmat.uevora.pt/index.php/pt/sobre_a_matematica/matematicos_famosos/thomas_bayes.* (s.d.). Obtido em 1 de Abril de 2013

- *http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm31/Bernoulli.htm.* (s.d.). Obtido em 28 de Dezembro de 2012

- *http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm31/Laplace.htm.* (s.d.). Obtido em 8 de Janeiro de 2013

- *http://www.oderson.com/educacao/estatistica/9-leigranden.htm.* (s.d.). Obtido em 16 de Fevereiro de 2013

- *http://www.prof2000.pt/users/sfilipe/Hist%20probabilidades.htm.* (s.d.). Obtido em 27 de Dezembro de 2012

- *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kruskal_Martin.html.* (s.d.). Obtido em 6 de Abril de 2013

- Humble, S. (2008). Magic Card Maths, The Montana Mathematics Enthusiast, 5, No.2&3. In S. Humble, *Magic Card Math* (pp. 327-336).

- Humble, S. (s.d.). *http://www.youtube.com/watch?v=goIOWcnagP0.* Obtido em 26 de Maio de 2013

- Lagarias, J. C., Rains, E., & Vanderbei, R. J. (2009). The Kruskal Count,. In J. C. Lagarias, E. Rains, & R. J. Vanderbei, *The Mathematics of Preference, Choice and Order* - (pp. 371-391). Berlin: Springer-Verlag.

- Laplace.(1814). *http://archive.org/stream/therieanalytiqu01laplgoog#page/n6/mode/2up.* Obtido em 28 de Dezembro de 2012

- Longo, E., & Branco, I. (2012). *Matemática Aplicada às Ciências Sociais, 11º ano.* Texto Editora, Lda.

- Meyer, P. L. (1991). *"Probabilidade, Aplicação à Estatistica".* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Cientificos Editora.

- Murteira, B., & Pimenta, C. (2007). *Introdução à Estatística.* McGrawHill.

- Paenza, A. (2005). *Matemática...estás aí?* Lisboa: Publicações Dom quixote.

- Pestana, D., & Velosa, S. (2006). *Introdução à Probabilidade e à Estatistica.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

- Piaget, J. (1978). *"Para onde vai a Educação".*

- Sá, I. P. (s.d.). A Porta dos desesperados (problema de Monty Hall). *Revista do Gepem - Volumes 51 e 52* , pp. 1-4.

- Seife, C. (2007). *"Zero",A biografia de uma ideia perigosa.* Lisboa: Gradiva.

- *Steve Humble ● Alchemist Cafe Dublin 12th Oct. 2010 - YouTube*. (s.d.). Obtido em 5 de Setembro de 2013

- Tausk, D. V. (23 de Julho de 2008). *O Problema dos Envelopes.* Obtido em 20 de Março de 2013, de www.ime.usp.br/~tausk/Envelopes.pdf.

- Tomatis, M. (15 de Julho de 2008). Il Principio di Kruskal. *Praestigiador, http://www.praestigiator.com · A cura di Mariano Tomatis*.

Anexos

Anexo 1A – Lançamento de um dado

Experiência de Dados não Transitivos L: 3 3 3 3 3 6 A: 2 2 2 5 5 5 V: 1 4 4 4 4 4 Um lançamento

Dados	Laranja/Amarelo		Laranja/Verde		Amarela/Verde	
1	G	P				
2	P	G				
3	G	P				
4	G	P				
5	G	P				
6	G	P				
7	P	G				
8	G	P				
9	P	G				
10	P	G				
11					P	G
12					P	G
13					G	P
14					G	P
15					P	G
16					P	G
17					P	G
18					G	P
19					G	P
20					G	P
21			P	G		
22			P	G		
23			P	G		
24			P	G		
25			P	G		
26			P	G		
27			P	G		
28			G	P		
29			P	G		
30			P	G		
31			G	P		
32			G	P		
33			P	G		
34			G	P		
35			G	P		
36			G	P		
37			P	G		
38			P	G		
39			P	G		
40			P	G		
41					P	G
42					P	G
43					G	P
44					P	G
45					G	P

Alunos 7º Ano 5/Março/2013

Anexo 1B – Lançamento de um dado - continuação

Experiência de Dados não Transitivos L : 3 3 3 3 3 6 A: 2 2 2 5 5 5 V: 1 4 4 4 4 4 Um lançamento

Dados	Laranja/Amarelo		Laranja/Verde		Amarelo/Verde	
46					G	P
47					G	P
48					P	G
49					P	G
50					P	G
51			P	G		
52			P	G		
53			P	G		
54			P	G		
55			P	G		
56			P	G		
57			P	G		
58			P	G		
59			G	P		
60			P	G		
61	G	P				
62	G	P				
63	G	P				
64	G	P				
65	G	P				
66	P	G				
67	P	G				
68	P	G				
69	P	G				
70	P	G				
71					P	G
72					G	P
73					G	P
74					G	P
75					P	G
76					P	G
77					G	P
78					G	P
79					G	P
80					G	P
81			G	P		
82			P	G		
83			P	G		
84			P	G		
85			P	G		
86			P	G		
87			G	P		
88			G	P		
89			P	G		
90			G	P		

Anexo 2A – Lançamento de dois dados

Experiência de Dados não Transitivos L: 3 3 3 3 3 6 A: 2 2 2 5 5 5 V: 1 4 4 4 4 4 Dois lançamentos

Dados	Laranja/Amarelo	Laranja/Verde	Amarela/Verde
1	P G		
2	P G		
3	G P		
4	P G		
5	P G		
6	P G		
7	P G		
8	P G		
9	P G		
10	P G		
11			G P
12			P G
13			G P
14			P G
15			P G
16			P G
17			P G
18			G P
19			G P
20			G P
21		G / P	
22		P G	
23		G P	
24		P G	
25		G P	
26		P G	
27		P G	
28		P G	
29		G P	
30		G P	
31	G P		
32	G P		
33	G P		
34	P G		
35	P G		
36	P G		
37	G P		
38	P G		
39	G P		
40	P G		
41			P G
42			G P
43			P G
44			P G
45			P G

Alunos 7º Ano 5/Março/2013

Anexo2B – Lançamento de dois dados - continuação

Experiência de Dados não Transitivos L: 3 3 3 3 3 6 A: 2 2 2 5 5 5 V: 1 4 4 4 4 4 Dois lançamentos

Dados	Laranja/Amarelo	Laranja/Verde	Amarelo/Verde
46			P G
47			P G
48			G P
49			P G
50			G P
51		G P	
52		P G	
53		G P	
54		P G	
55		P G	
56		G P	
57		P G	
58		P G	
59		P G	
60		G P	
61	P G		
62	P G		
63	P G		
64	G P		
65	P G		
66	G P		
67	P G		
68	P G		
69	G P		
70	P G		
71			P G
72			G P
73			P G
74			G P
75			P G
76			P G
77			P G
78			P G
79			G P
80			P G
81	G P		
82	P G		
83	G P		
84	P G		
85	P G		
86	G P		
87	G P		
88	P G		
89	G P		
90	P G		

Anexo 3 – Parte da Simulação do lançamento de “Dados Não Transitivos”-1

Dado normal	Dado nor	dado 222555	Dado norm	Dado 333336	Dado nor	Dado 144444	A-L	L-V	V-A
3	4	5	2	3	3	4	A	V	A
2	2	2	5	3	4	4	L	V	V
5	6	5	4	3	6	4	A	V	A
2	3	2	2	3	5	4	L	V	V
2	4	5	4	3	5	4	A	V	A
3	5	5	6	6	1	1	L	L	A
4	1	2	6	6	4	4	L	L	V
2	4	5	5	3	1	1	A	L	A
2	5	5	6	6	6	4	L	L	A
2	5	5	1	3	6	4	A	V	A
6	5	5	6	6	4	4	L	L	A
3	6	5	1	3	3	4	A	V	A
5	3	2	4	3	5	4	L	V	V
1	6	5	4	3	6	4	A	V	A
6	4	5	1	3	6	4	A	V	A
5	4	5	3	3	2	4	A	V	A
4	2	2	3	3	5	4	L	V	V
4	6	5	5	3	5	4	A	V	A
4	5	5	3	3	3	4	A	V	A
5	5	5	3	3	5	4	A	V	A
3	4	5	5	3	3	4	A	V	A
1	4	5	5	3	1	1	A	L	A
2	2	2	2	3	4	4	L	V	V
2	5	5	2	3	4	4	A	V	A
5	3	2	5	3	5	4	L	V	V
5	1	2	1	3	4	4	L	V	V
4	5	5	4	3	4	4	A	V	A
1	4	5	3	3	3	4	A	V	A
2	2	2	4	3	3	4	L	V	V
3	2	2	1	3	6	4	L	V	V
3	5	5	1	3	5	4	A	V	A
6	2	2	5	3	5	4	L	V	V
3	4	5	4	3	3	4	A	V	A
3	5	5	4	3	5	4	A	V	A
2	3	2	1	3	6	4	L	V	V
4	2	2	2	3	6	4	L	V	V
5	1	2	1	3	2	4	L	V	V
5	6	5	4	3	2	4	A	V	A
2	6	5	3	3	3	4	A	V	A
5	5	5	3	3	6	4	A	V	A
2	2	2	2	3	1	1	L	L	A
3	3	2	2	3	5	4	L	V	V
5	3	2	6	6	3	4	L	L	V
1	2	2	2	3	4	4	L	V	V
1	5	5	6	6	2	4	L	L	A
3	3	2	3	3	4	4	L	V	V
4	1	2	1	3	2	4	L	V	V
1	4	5	6	6	4	4	L	L	A
4	1	2	1	3	4	4	L	V	V
5	2	2	1	3	6	4	L	V	V
4	5	5	1	3	6	4	A	V	A
4	6	5	6	6	4	4	L	L	A
2	2	2	6	6	6	4	L	L	V
6	2	2	4	3	4	4	L	V	V
2	6	5	6	6	4	4	L	L	A
4	4	5	3	3	4	4	A	V	A
2	3	2	2	3	5	4	L	V	V
1	5	5	2	3	5	4	A	V	A
2	4	5	4	3	4	4	A	V	A
6	2	2	5	3	2	4	L	V	V
1	6	5	1	3	2	4	A	V	A
5	5	5	3	3	3	4	A	V	A
3	4	5	3	3	1	1	A	L	A
4	5	5	6	6	6	4	L	L	A
6	6	5	1	3	2	4	A	V	A
2	4	5	6	6	4	4	L	L	A
4	5	5	6	6	2	4	L	L	A
2	1	2	5	3	2	4	L	V	V
4	6	5	1	3	6	4	A	V	A
1	6	5	5	3	2	4	A	V	A
3	1	2	4	3	5	4	L	V	V
4	4	5	3	3	3	4	A	V	A
6	6	5	3	3	6	4	A	V	A

Anexo 4 – Parte da Simulação do lançamento de “Dados Não Transitivos”- 2

1.º Lançamento	**2.º Lançamento**	**Soma**	1.º Lançamento	2.º Lançamento	Soma	**1.º Lançamento**	**2.º Lançamento**	**Soma**	1.º Lançamento	2.º Lançamento	Soma
6	6	12	5	2	7	3	3	6	1	4	5
2	3	5	2	2	4	3	6	9	1	4	5
5	1	6	2	5	7	3	3	6	4	4	8
6	2	8	2	5	7	3	3	6	4	4	8
6	3	9	2	5	7	6	3	9	1	4	5
2	3	5	2	5	7	3	3	6	1	4	5
6	4	10	2	5	7	3	6	9	4	4	8
6	6	12	2	5	7	3	3	6	4	4	8
2	5	7	5	2	7	3	3	6	4	1	5
3	3	6	5	2	7	3	3	6	4	4	8
2	3	5	5	5	10	3	3	6	4	4	8
1	5	6	2	2	4	6	6	12	1	1	2
1	5	6	2	5	7	3	3	6	4	4	8
6	4	10	2	5	7	3	3	6	4	4	8
5	3	8	2	2	4	3	3	6	4	4	8
6	4	10	5	5	10	6	3	9	1	4	5
4	2	6	2	2	4	3	3	6	4	4	8
6	4	10	5	2	7	3	3	6	1	4	5
4	3	7	5	5	10	3	3	6	4	1	5
6	4	10	5	2	7	3	3	6	4	4	8
4	5	9	2	2	4	3	3	6	1	4	5
5	3	8	5	5	10	3	3	6	1	1	2
1	6	7	2	5	7	3	3	6	4	4	8
6	3	9	5	2	7	6	3	9	4	4	8
5	1	6	2	5	7	3	3	6	4	1	5
1	1	2	2	2	4	6	3	9	1	4	5
3	1	4	5	5	10	3	6	9	4	4	8
6	3	9	5	2	7	3	3	6	4	4	8
6	1	7	5	2	7	3	3	6	4	1	5
1	1	2	5	5	10	3	6	9	4	4	8
4	5	9	5	2	7	3	3	6	4	4	8
2	3	5	2	2	4	3	3	6	1	4	5
1	4	5	5	5	10	6	3	9	4	4	8
2	1	3	2	5	7	3	6	9	4	4	8
1	4	5	2	5	7	3	3	6	1	4	5
3	5	8	5	5	10	6	3	9	4	4	8
5	6	11	5	2	7	3	3	6	4	4	8
2	2	4	2	2	4	3	6	9	4	4	8
3	2	5	5	5	10	6	3	9	4	1	5
3	4	7	5	5	10	6	3	9	4	1	5
2	2	4	5	2	7	3	3	6	4	4	8
5	2	7	2	2	4	3	3	6	4	1	5
5	3	8	5	2	7	3	3	6	4	4	8
3	6	9	2	2	4	3	3	6	4	4	8
5	4	9	2	5	7	3	3	6	1	4	5
4	3	7	2	2	4	3	3	6	4	4	8
6	4	10	2	5	7	3	3	6	4	1	5
5	1	6	2	5	7	3	6	9	4	4	8
3	5	8	2	5	7	3	3	6	4	4	8
5	4	9	2	2	4	3	3	6	4	4	8
1	4	5	2	5	7	6	3	9	4	4	8
1	1	2	5	5	10	3	3	6	4	4	8
5	2	7	5	2	7	3	3	6	4	1	5
4	6	10	2	5	7	3	3	6	4	4	8
5	2	7	5	2	7	3	3	6	4	1	5
5	4	9	2	5	7	3	3	6	1	4	5
3	3	6	2	2	4	3	3	6	4	4	8
6	1	7	2	2	4	3	3	6	1	4	5